Системы счисления

Хотим записывать числа

$42 \qquad \overline{XLII} \qquad 2A_{16}$ $\Bigg\}$ одно и то же число 42

$XL = 40$

||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

Позиционные системы счисления

Есть цифры — символы для записи чисел.
Смысл цифры зависит от позиции

$42 \neq 24$

десятки, единицы — десятки, единицы

Опр. $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ — основание системы счисления.

Цифры — это числа $0 \leq a_i < p$ (где a_i — цифры)

$\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0}$ — это запись числа

$= a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n$

Черта — чтоб было ясно, что это цифры числа, а не произведение a_i

Пример $p = 10$ $\quad a_1 = 4 \quad a_0 = 2$

$$\overline{42} = 4 \cdot 10^1 + 2$$

Пример $p = 16$ $\quad \overline{1ABC}$

цифры $A = 10 \quad B = 11 \quad C = 12$

$\overline{a_3 a_2 a_1 a_0}$

$a_3 = 1$
$a_2 = 10$
$a_1 = 11$
$a_0 = 12$

$= 1 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16 + 12 =$

$= 4096 + 2560 + 176 + 12 = 6844.$

начиная с синей галочки мы считали в 10-й с/счисления.

Th. $\forall x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $\exists!$ представление числа в p-ой системе счисления $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

Д-во I почему всегда можно записать x в p-ой с/счисления?

$$x \stackrel{?}{=} \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = \underbrace{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p}_{\vdots\, p} + a_0$$

$p > a_0 \geq 0$

$a_0 := x \bmod p.$

делим с остатком x на p:

неполное частное

$$x = x_0 = p x_1 + a_0$$

остаток.

Индукция $x = 0$, $x = 1$ можно представить в p-ой с/счисления

Переход. Если $y < x$ можно представить в p-ой с/сч, то x — тоже можно

$$x = p x_1 + a_0 \Rightarrow \quad x_1 < x$$

можно представить

$$= \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_0} =$$

$$= b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_0$$

$$\Rightarrow p(b_m p^m + \ldots + b_0) + a_0 = b_m p^{m+1} + \ldots + b_1 p^2 + b_0 p + a_0$$

т.е. $a_n = b_m \quad a_{n-1} = b_{m-1} \ldots \quad a_1 = b_0 \quad a_0 = a_0$ ∎

II Почему единственное представление?

∃ $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0} = \overline{b_m b_{m-1} \ldots b_0}$

Поймем, что $a_0 = b_0$

$$\underbrace{a_n p^n + \ldots + a_1 p^1}_{\vdots p} + \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\overset{\substack{p \\ \vee}}{a_0}} = \underbrace{b_m p^m + \ldots b_1 p}_{\vdots p} + \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\overset{\substack{p \\ \vee}}{b_0}}$$

$\Rightarrow$ a_0 и $b_0 = x \bmod p$

деление с остатком единственно

$\Rightarrow a_0 = b_0$

Теперь $a_n p^n + \ldots + a_1 p^1 = b_m p^m + \ldots + b_1 p$

$\Rightarrow$ сокр на p $\quad a_n p^{n-1} + \ldots + a_1 = b_m p^{m-1} + \ldots + b_1$

Аналогично $a_1 = b_1$ и так далее.

пока где-то не кончатся цифры (справа)

$$a_\cdot p^\cdot + \ldots + a_k = 0$$

$\Rightarrow a_k, a_{k+1}$ и т.д. все равны 0.

$042 = 42$ – одно и то же число.

В условии теоремы и вообще в определении позиционной системы счисления требуется, чтобы первая цифра не была 0. ∎

<u>Алгоритмы</u>

Перевод между системами счисления

I Дано число, узнать его цифры в p-ой с/счисления.

Дано x, p

Пока $x \neq 0$

делим с остатком на p.

$x = py + r$

r – записать как очередную цифру в начало ответа.

$x := y$

<u>Пример</u> 42 в 9-ую $(p=9)$

42 | 9
36 | 4 y — частное
6 — остаток

Ответ
46

4 | 9
0 | 0 — частное
4 — остаток

Пример 2

50 в 2-ую.

50 | 2
4 | 25 | 2
10 | 2 | 12 | 2
10 | 5 | 12 | 6 | 2
0 | 4 | 0 | 6 | 3 | 2
1 | 0 | 2 | 1 | 2
1 | 0 | 0 ← частное
1

Ответ: 110010

II. Даны цифры, узнать число

Дано n, $a_n \ldots a_1 a_0$, p

```
x:=0
for i = 0 to n
    x:=x+a_i·p^i
Ответ = x
```

```
x:=0
for i:=n to 0
    x=x·p+a_i
```

$$((0\cdot p+a_n)\cdot p+a_{n-1})p+a_{n-2}+\ldots$$

$$=(a_n p^2+a_{n-1}p+a_{n-2})p+a_{n-3}$$

Пример 42_{13} $\quad 4\cdot 13+2=54.$

Пример $10101010_2 = 1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0 =$

$=128+32+8+2=170.$

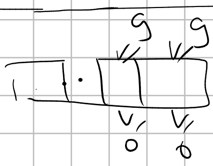
Арифметические операции сложения/умножения в столбик в разных с/сч

$$\begin{array}{r} 102_3 \\ +\ 1201_3 \\ \hline 2010_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} =9+2=11 \\ =27+18+1=46 \\ =2\cdot 27+3=57 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102_3 \\ *\ \ 21_3 \\ \hline 102 \\ +\ 211\ \ \\ \hline 2212_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} =11 \\ =2\cdot 3+1=7 \\ 11\cdot 7=77 \\ =2\cdot 27+2\cdot 9+1\cdot 3+2 \end{array}$$

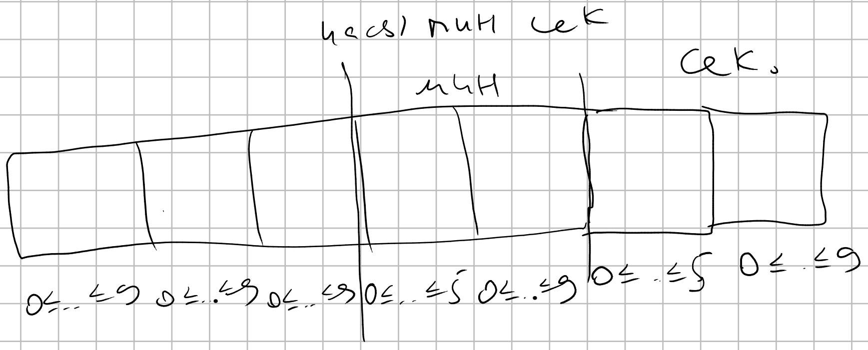
Позиц с/счисления с переменным основанием

в 10-ой с/счисления



часы

2:32:15



$\ldots\ldots \quad p_5=10 \quad p_4=10 \quad p_3=6 \quad p_2=10 \quad p_1=6 \quad p_0=10$

Определение Позиционная с/счисления с переменным основанием $\{p_i\}_{i\geq 0}$

В примере $p_1=6$ $p_3=6$ остальные $p_i=10$

— это способ записи чисел, в котором числа выглядят $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_0}$, где $0 \leq a_i < p_i$

и запись означает:

$$a_0 + a_1 p_0 + a_2 p_0 p_1 + a_3 p_0 p_1 p_2 + \ldots + a_n p_0 p_1 \ldots p_{n-1}$$

Замечание. p-ая система счисления — это частный случай, когда $p_i = p$. (все p_i одинак.)

Пример. $p_1=6$ $p_3=6$ $p_i=10$

$\underset{a_3 a_2 a_1 a_0}{\overline{1239}} =$ (12 мин 39 сек)

$$\overset{a_0}{9} + \overset{a_1}{3} \cdot \overset{p_0}{10} + \overset{a_2}{2} \cdot \overset{p_0}{10} \cdot \overset{p_1}{6} + \overset{a_3}{1} \cdot \overset{p_0}{10} \cdot \overset{p_1}{6} \cdot \overset{p_2}{10} = 9+3+120+$$

$600 = 732.$