~~Ждем~~ слушателей...

Слышно?

Объявления

- CS - центр
- Альтернативный экзамен

Th. $\forall a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ или $b \neq 0$
$d = (a, b)$
Тогда: $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad \underline{ax + by = d}$

линейное разложение
Н. общ. делителя

Д-во. см. ранее. $\forall$ число, которое появляется в АЕ можно представить в виде $ax + by$

Начало $]\ a > b$

Начальные Числа АЕ

$a_1 = a = a \cdot 1 + b \cdot 0$

$a_2 = b = a \cdot \underset{x_2}{0} + b \cdot \overset{y_2}{1}$

вычесть из первого второе q раз

$a_3 = a(\underset{x_3}{1}) + b(\underset{y_3}{-q})$

вычесть из первого второе $\tilde{q}$ раз

$a_4 = a(\underset{x_4}{\ldots}) + b(\underset{y_4}{\ldots})$

$a_3 = a \bmod b$
$a = bq + a_3$
$a_3 = a - b \cdot q$

$a_4 = b \bmod a_3$
$a_4 = b - a_3 \tilde{q}$

В общем случае $a_k = a_{k-2} \bmod a_{k-1}$

$\Rightarrow \quad a_k = a_{k-2} - \tilde{q}\, a_{k-1} \Leftarrow$ a_{k-2} и a_{k-1} уже имеют представления вида $a \ldots + b \ldots$

$\Rightarrow \quad a_k = (a \cdot x_{k-2} + b\, y_{k-2}) - \tilde{q}(a x_{k-1} + b y_{k-1}) = a(x_{k-2} - \tilde{q} x_{k-1}) + b(y_{k-2} - \tilde{q} y_{k-1})$

НОД(a, b) — это какой-то a_n, где n - число шагов АЕ

$\Rightarrow$ НОД тоже имеет вид $a x_n + b y_n$

Пример. $a=70 \quad b=50$

АЕ: $a_1 = a = 70 = 70 \cdot 1 + 50 \cdot 0$

$a_2 = b = 50 = 70 \cdot 0 + 50 \cdot 1$ — 1 раз

$a_3 = 20 = 70 \cdot 1 + 50 \cdot (-1)$ — 2 раза

$1 - 2(-1) = 3$

$a_4 = 10 = 70(-2) + 50 \cdot (3)$ — 2 раза

$a_5 = 0 = 70(5) + 50(-7)$

$-7 = -1 - 2 \cdot 3$

$= 1 - 2(-2)$

$a_3 = 70 \bmod 50 = 20$
$= 70 - 50 \cdot 1$

$a_4 = 50 \bmod 20 = 10$
$= 50 - 20 \cdot 2$

$a_5 = 20 \bmod 10$
$= 20 - 10 \cdot 2$

Ответ, это НОД(70, 50)

$10 = 70(-2) + 50 \cdot 3$

На практике 0 вычислять смысла нет.

Обычно записывают так:

70	1	0
50	0	1
20	1	-1
10	-2	3
0	5	-7

Решение Диофантовых уравнений

ДУ — уравнения в целых числах

пример. (сами)

$x^2 + 2 = y^3$

найти хотя бы какие-то $x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad x = 5 \quad y = 3$

Пример 2 $\quad x^n + y^n = z^n$

решить при $n > 2$

$x, y, z \in \mathbb{Z}. \quad n \in \mathbb{N}$

Теорема Ферма (Великая) $\Rightarrow$ Нет решений.

Решаем при $n = 2$ $\quad$ Общий вид решения:

$x^2 + y^2 = z^2$

$x = 3 \quad y = 4 \quad z = 5$

$a = 2, \ b = 1$

$x = a^2 - b^2$
$y = 2ab$ $\quad$ для $\forall a, b \in \mathbb{Z}$
$z = a^2 + b^2$

$2^2 - 1^2 = 3 \qquad 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \qquad 2^2 + 1^2 = 5$

Мы решаем уравнение вида $ax+by=c$, где a,b,c – даны, x,y – неизвестные

Пример. $7x+4y=5$. подберём x,y.

$x=+3$
$y=-4$

$7(3)+4(-4)=5.$

подобрали!! Есть еще ответы. $x=-1$, $y=3$

$7(-1)+4\cdot(3)=5$

и еще есть, их ∞ много.

17:05 ??

Рассуждения $\exists$ есть 2 решения:

$$\begin{cases} ax_1+by_1=c & (1) \\ ax_2+by_2=c & (2) \end{cases}$$

связаны ли как-то $x_1\ x_2\ y_1\ y_2$?

Вычтем $(1)-(2)$: $a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0$

$\Rightarrow a(x_1-x_2)=-b(y_1-y_2)$

$\exists (a,b)=1 \leftarrow$ разберём такой случай

В примере
$a=7$
$b=4$
$(a,b)=1$

$a(x_1-x_2) \vdots b \Rightarrow x_1-x_2 \vdots b$

$\Rightarrow x_1-x_2=b\cdot k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

В примере: $x_1-x_2=3-(-1)=4 \vdots b=4$

Вспомним : $a(x_1-x_2)=-b(y_1-y_2)$

$a\,b\cdot k=-b(y_1-y_2)$

$\Rightarrow -ak=y_1-y_2$

Итак. Если $x_1\ y_1$ и $x_2\ y_2$ решения

Лемма

$ax+by=c$ и $(a,b)=1$

Тогда $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\quad x_1 - x_2 = b \cdot k$

$y_1 - y_2 = -a \cdot k$

Д-во. см. выше ■

А если $(a,b) \neq 1$. Рассуждаем опять

Было: $\quad a(x_1 - x_2) = -b(y_1 - y_2)$

$\exists\ d = (a,b)$ введем $\bar{a} = a/d$

$\bar{b} = b/d$

сократим равенство на d

$$\bar{a}(x_1 - x_2) = -\bar{b}(y_1 - y_2)$$

лемма.

Поймем, что $(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ $\quad$ $\boxed{\text{т.е. } \frac{a}{(a,b)} \text{ и } \frac{b}{(a,b)} \text{ – вз. просты}}$

Пусть не вз. просты $\exists$ есть общий делитель ξ

$\bar{a} \vdots \xi \quad \bar{b} \vdots \xi \quad \frac{a}{(a,b)} \vdots \xi \Rightarrow a \vdots (a,b)\xi$

аналогично $b \vdots (a,b)\xi$

Но (a,b) – наибольший ОД $\Rightarrow (a,b) \geq (a,b)\xi$

$\Rightarrow \xi = \pm 1$

Тогда $\exists k$: $\quad x_1 - x_2 = k \cdot \bar{b}$

$y_1 - y_2 = -k \cdot \bar{a}$

Итог рассуждения.

Лемма $\quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a \neq 0$ или $b \neq 0$

$d = (a,b)$

$\exists$ есть два решения уравнения $ax + by = c$

$x_1 y_1$ и $x_2 y_2$

Тогда $\exists k$: $\quad x_1 - x_2 = k \cdot b/d$

$y_1 - y_2 = -k \cdot a/d$

Д-во ■

Следствие. Попробуем описать все решения

$$ax + by = c$$

$a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad a \neq 0$ или $b \neq 0$

$c \in \mathbb{Z}$

$\exists$ x_0 y_0 — решение. Частное, не важно, как его нашли.

Тогда $\forall$ другое решение x, y может быть записано в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot b/d \\ y = y_0 - k\, a/d \end{cases}$$

Замечание. Это описание всех решений уравнения.

Надо будет
1) $\forall$ решение можно так получить
2) $\forall k$ получается решение