Конспект по дискретной математике.

Лектор - Посов И.А.

6.05.19

1 Комбинаторика

-Наука о том, как посчитать количество чего либо. (элементов конечного множества)

Правило сложения $|A \cup B| = |A| + |B|$, если $A \cap B \neq \emptyset$ (не пересекается)
$\cup$ - объединение множеств $|x|$ - количество элементов в x

Пример:

1)

10 синих шаров $= A$,
10 красных шаров $= B$

всего шаров 20

2)

$A =$ двузначные числа, с последней цифрой $1 \ni 41$
$B =$ двузначные числа, с последней цифрой $3 \ni 23$
$A \cup B =$ двузначные числа, с последней цифрой 1 или $3 \ni 41$ или 23
$|A| = |B| = 9 \quad |A \cup B| = 9 + 9 = 18$

Правило умножения

A, B

$A \times B$ - декартово произведение множеств

-множество пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$

Пример

$A = \{123\}, B = \{xy\} - \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$
$A \times B = \{1x\ 1y\ 2x\ 2y\ 3x\ 3y\}$

Правило умножения

$|A \times B| = |A||B|$

В примере $|A \times B| = 6 \;\; |A| = 3, |B| = 2$

$6 = 3 * 2$

Пример: сколько 3-ех значных чисел?

$$A = \{1\ 2\ 3\ \dots\ 9\}\ |A| = 9$$
$$B = \{0\ 1\ 2\ 3 \dots 9\}\ |B| = 10$$
$$C = \{0\ 1\ 2\ 3 \dots 9\}\ |C| = 10$$

$A \times B \times C \longleftrightarrow$ 3-ех значные числа.

$((a,b),c) \longleftrightarrow (a,b,c)$

$|A \times B \times C| = 9 \times 10 \times 10 = 900$

Принцип биекции

$|A| = |B| \Leftrightarrow$ существует взаимно однозначное отображение, которое элементам одного множества сопоставляет элементы другого

$f : A \longrightarrow B$

1) $f(A) = B$ или $\forall\ b \in B\ \exists\ a : f(a) = b$

2) $f(a_1) \neq f(a_2)$, если $a_1 \neq a_2$

Пример

1)

$$\{a,b,c\} \quad \{1,2,3\}$$
$$1 \leftrightarrow a$$
$$2 \leftrightarrow b$$
$$3 \leftrightarrow c$$

2)

Слова в алфавите a, b, c длины 5 и числа от 0 до 242

$a = 0,\ b = 1,\ c = 2$

$aaaaa \leftrightarrow 00000_3 = 0$

$abacc \leftrightarrow 01022_3 = 27 + 2 * 3 + 2 = 35$

$baccc \leftrightarrow 10222_3$

$ccacc \leftrightarrow 22022_3$

$\vdots$

$ccccc \leftrightarrow 22222_3 = 242$

от 0 до 242 $\rightarrow$ 243 числа

$A = \{a,b,c\}$

$|A \times A \times A \times A \times A| = |A|^5 = 3^5 = 243$

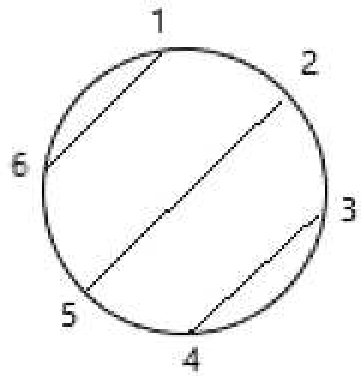
$\mathbb{N} = 1\ 2\ 3\ 4 \dots$

$2\mathbb{N} = 2\ 4\ 6\ 8 \dots$

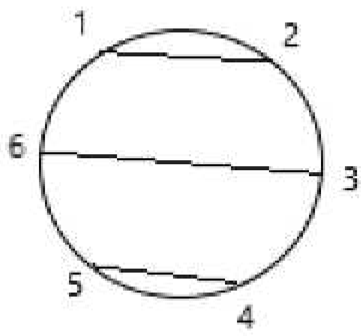
$f(x) = 2x$

3)

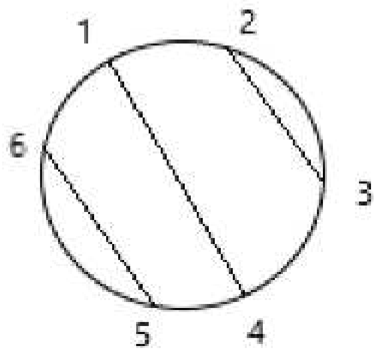
$A =$ множество правильных скобочных последовательностей
$B =$ множество разбиений круга хордами
$A \ \ n = 3$
((()))
()()()
(())()
()(())
B



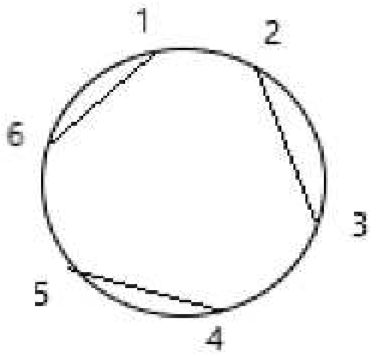
((()))



()(())



(())()



(()())

взаимно однозначное соответствие правильной скобочной последовательности и разбиеня кругов не пересекающимися хордами

$n = 1$ () 1 шт
$n = 2$ ()() (()) 2 шт

$n = 3 \ldots 5$ шт
$n = 4 \ldots 14$ шт
числа Каталана
$C_n = \ldots$

Чило сочетаний
Дано множество $|A| = n$
Сколько подмножеств размера k?
Пример $|A| = 4$, $k = 2$
$A = \{a\ b\ c\ d\}$
$\{ab\}\ \{ac\}\ \{ad\}\ \{bc\}\ \{bd\}\ \{cd\}$ - 6 шт
Пример задач.

- -сколько способов выбрать из 100 студентов 10, которые получат 5 автоматом.
- -сколько пятизначных чисел, у которых цыфры возрастают?

$13789 \leftrightarrow \{1, 3, 7, 8, 9\}$
$23579 \leftrightarrow \{2, 3, 5, 7, 9\}$ - пожмножество из 5 элементов {1,2,3, . . . , 9}

Определение
C_n^k - количество подмножеств размера k в множестве $A|A| = n$
Вывод формулы:
$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{\ }$ k позиций
n способов выбрать 1-ый элемент
$n - 1$ способов выбрать 2-ый элемент
$\vdots$
$n - k + 1$ способов выбрать k-ый элемент
Всего $n \times (n - 1) \times \ldots (n - k + 1)$ способов выбрать k элементво из n с учетом порядка $= \frac{n!}{(n-k)!}$
но порядок не важен
Пусть $k = 3$
$\boxed{3}\boxed{7}\boxed{11}$
$\boxed{7}\boxed{3}\boxed{11}$
$\boxed{11}\boxed{3}\boxed{7}$
- это одно и то же

Таких одинаковых наборов $k!$ штук, это перестановки элементов. То есть в формуле $\frac{n!}{(n-k)!}$ каждый ответ посчитан $k!$ раз. Значит окончательно $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
Пример $C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{2*2} = 6$
Свойства

1)

$C_n^k = C_n^{n-k}$
Аналитическое доказательство:
$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

2)

$C_n^0 = C_n^n = 1$

$\frac{n!}{0!n!}$ $0! = 1$

3)

$C_n^1 = C_n^{n-1} = n$

4)

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

$$\begin{array}{c} C_0^0 \\ C_1^0 C_1^1 \\ C_2^0 C_2^1 C_2^2 \\ C_3^0 C_3^1 C_3^2 C_3^3 \\ C_{n-1}^{k-1} \cdots C_{n-1}^k \\ C_n^k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 11 \\ 121 \\ 1331 \\ 14641 \\ \uparrow \\ \text{Треугольник Паскаля} \end{array}$$