Лекция по дискретной математике

27 мая 2019

Транзитивность
Определение: R - транзитивно, если $\forall a, b, c \in M : aRb, bRc \Rightarrow aRc$
Примеры:

- $(=, \mathrm{M})$ $a = b$, $b = c$, $\Rightarrow a = c$
- $(\vdots, \mathbb{Z})$ $a \vdots b$, $b \vdots c$, $\Rightarrow a \vdots c$
- $(\parallel$, прямые$)$ $a \parallel b$, $b \parallel c$, $\Rightarrow a \parallel c$

Контрпример к транзитивности:
- $a, b, c \in M : aRb$, bRc и $a \not R c$
Отношение $(\approx, \mathbb{R})$ $a \approx b \Leftrightarrow (a - b) \leq 2$ - не транзитивно. Контрпример: $1 \approx 3 \approx 5$, но $1 \not\approx 5$

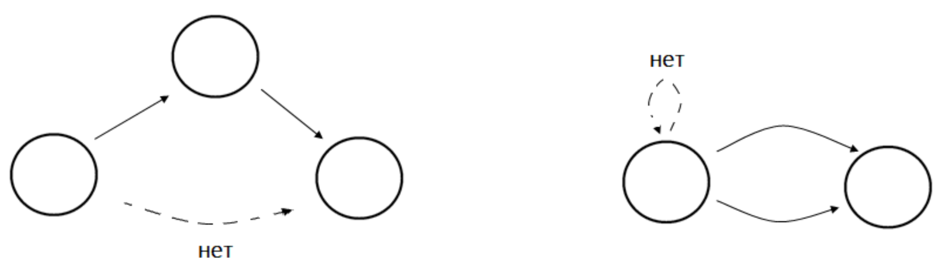

Рис. 1: Контрпример транзитивности на графе

Пример:

- Пустое отношение транзитивно
- Полное отношение транзитивно

Определение: R - отношение эквивалентности, если R - рефлексивно, симметрично, транзитивно
Пример: $(=, \mathrm{M})$, $(\parallel$, прямые$)$, $(\equiv \bmod 3, \mathbb{Z})$, (в одной группе, студенты "ЛЭТИ")

Определение: Пусть R - ОЭ на M, $a \in M$, тогда $C_a = \{xRa(x \in M)\}$
Утверждение: $\forall a, b \in M$ $C_a = C_b$ или $C_a \cap C_b = \varnothing$

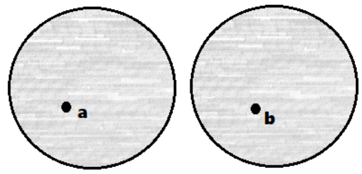

Рис. 2:

Док-во:
$c \in C_a \cap C_b$ (т. е. $C_a \cap C_b \neq \varnothing$
$cRa, cRb \Rightarrow aRc \Rightarrow aRb$
Теперь рассмотрим $\forall$ элемент d, если $d \in C_a \Rightarrow d \in C_b$ и наоборот.
Проверяем
$d \in C_a \Rightarrow$ dRa, но aRb $\Rightarrow$ dRb $\Rightarrow d \in C_b$
Итого $C_a = C_b$
Замечание:

- $a = b \Rightarrow a$ и b одинаковые
- $a \parallel b \Rightarrow a$ и b имеют одинаковое направление
- $a \equiv b \bmod 3 \Rightarrow a$ и b имеют одинаковый остаток
- aRb, где R - отношение "в одной группе"$\Rightarrow a$ и b имеют одну группу

Следствие: R - отношение ОЭ на M разбивает M на классы эквивалентности

Пример: ($\equiv \bmod 3$, $\mathbb{Z}$)
КЭ $C_0 = \{0, 3, 6, 9, ...\} = 0$
$C_1 = \{1, 4, 7, 10, ...\} = 1$
$C_2 = \{2, 5, 8, 11, ...\} = 2$
Замечание: ОЭ соответствует разбиению множества M
aRb, если a и $b \in$ одному C
Определение: R - отношение порядка R - строгий//нестрогий порядок Строгий порядок = транзитивность + антисимметричность + антирефлексивность Нестрогий порядок = транзитивность + антисимметричность + рефлексивность **Примеры:**

1. $>$ строгий
2. $\geq$ нестрогий
3. $a \,\vdots\, b$ на $\mathbb{N}$ нестрогий

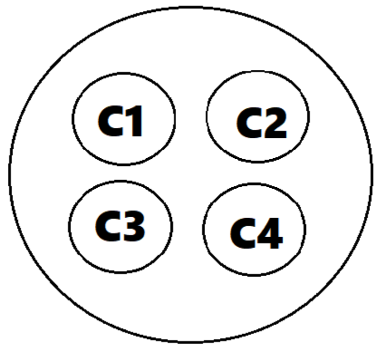

Рис. 3: Разбиение множества на классы эквивалентности

4. лучше оценка на экзамене по ДМ
5. $a > b$ если $ax > bx$ и $ay > by$ (точки $\mathbb{R}$ строгий

Определение: R - линейный порядок, если $\forall a \neq b \in M$ aRb или bRa. Иначе - частичный В примерах: 1) 2) линейный порядок, 3) 4) 5) - частичный

Пример: M = {123456}, $\vdots$

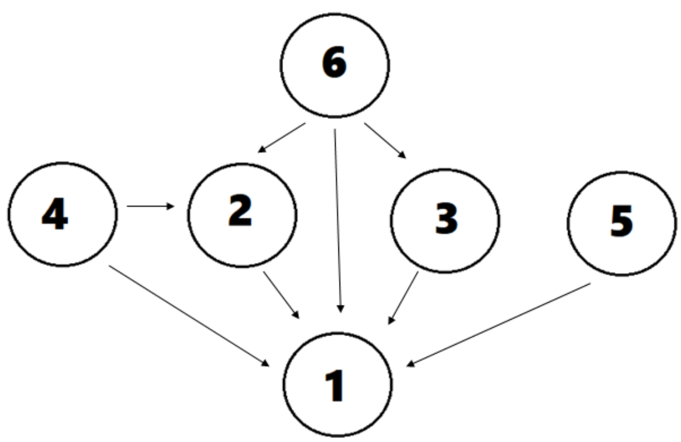

Рис. 4: Частичный порядок

$x \vdots y \Rightarrow x$ правее y
123645 - это линейный порядок
123456 - тоже линейный порядок

Определение: $\overline{R}$ - отношение на M, R - отношение на M. $\overline{R}$ надотношение R, если $aRb \Rightarrow a\overline{R}b$

Замечание: $\overline{R}$ - это R, куда добавлены ребра 1 в матрицу пар элементов

Определение: Пусть R - отношение порядка в M, $\overline{R}$ - топологическая сортировка в R, если: 1) $\overline{R}$ - надотношение R, 2) $\overline{R}$ - линейный порядок

Алгоритм: Как сделать топологическую сортировку

```
повторять
   взять элемент, из которого не идут ребра
   удалить его вместе с ребрами из R
   написать следующим в ответ
```

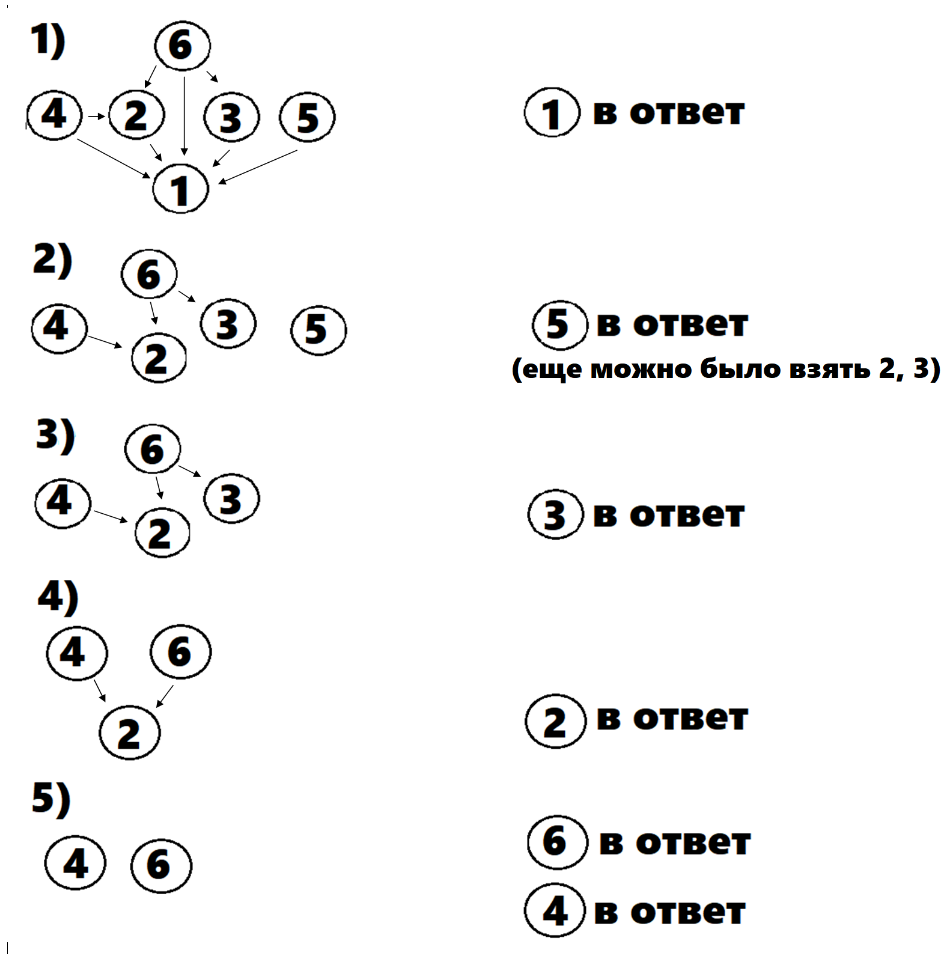

Рис. 5: Пример топологической сортировки