Лекция по дискретной математике

13 мая 2019

Свойство $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^i$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Аналитическое доказательство

база $(a+b)^0 = C_0^0 a^0 b^0$

переход $(a+b)^n = (a+b)^{n-1}(a+b) = (C_{n-1}^0 a^0 b^{i-1} + ... + C_{n-1}^{n-1} a^{n-1} b)(a+b) = C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + C_{n-1}^k a^k b^{n-k}$

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Комбинаторное доказательство

$(a+b)^n = (a+b)(a+b)...(a+b) = +\binom{a}{b} * \binom{a}{b} * \binom{a}{b} ... * \binom{a}{b} + = +aabbaa+$ (слагаемые имеют такой вид, их 2^n шт.

Сколько слагаемых вида $a^k b^{n-k}$?

Их C_n^k , тк есть n скобок, выбираем из них k, из которых выбрать a $\Rightarrow$ после приведения подобных перед $a^k b^{n-k}$ коэффициент $= C_n^k$

Задача о счастливых билетах. Метод шаров и перегородок

Задача: Сколько способов представить число $n \in \mathbb{Z}(n > 0)$ в виде суммы k слагаемых x_i, $x_i \in \mathbb{Z}$ $x_i >= 0$?

Пример:

n = 4, k = 3

- $4 = 0 + 0 + 4$
- $4 = 0 + 1 + 3$
- $4 = 0 + 2 + 2$
- $4 = 0 + 3 + 1$
- $4 = 0 + 4 + 0$
- $4 = 1 + 1 + 2$
- $4 = 1 + 0 + 3$
- $4 = 1 + 2 + 1$
- $4 = 1 + 3 + 0$
- $4 = 2 + 0 + 2$

- $4 = 2 + 1 + 1$
- $4 = 2 + 2 + 0$
- $4 = 3 + 0 + 1$
- $4 = 3 + 1 + 0$
- $4 = 4 + 0 + 0$

всего 15 способов

Взаимно однозначное соответствие

$n = x_1 + ... + x_k \leftrightarrow \bullet\bullet\bullet(x_1) + \bullet(x_2) + \bullet(x_3) + \bullet(x_n)$ (Последовательность из n кружочков и k-1 "+")

Пример:

$1 + 2 + 1 \leftrightarrow \bullet + \bullet\bullet + \bullet$

$4 + 0 + 0 \leftrightarrow \bullet\bullet\bullet\bullet + +$

Сколько таких последовательностей?

Ответ: $C^n_{n+k-1} = C^{k-1}_{n+k-1}$

если n = 4, k = 3

Ответ: $C^4_{4+3-1} = C^2_6 = \frac{6*5}{2} = 15$

Формула включений-исключений

Пусть A - множество

$A = \cup A_i$, где A_i - тоже множество

$|A| = |A_i| + ... + |A_n| = |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - ... - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + ... + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - ... - (-1)^n * |A_1 \cap ... \cap A_n|$

n = 2

$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

n = 3

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Характеристическая функция множества

Пусть U - множество

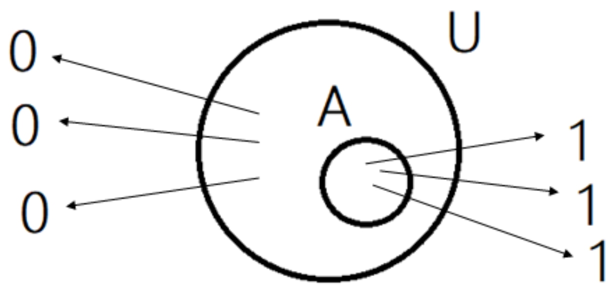
Пусть $A \subset U$

Тогда χ_A - характерическая функция множества A

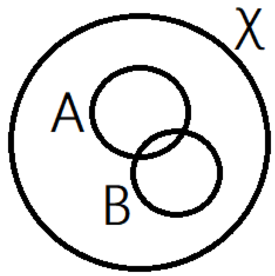
$\chi_A U \to \{0, 1\}$

$\chi_A(a) = 0$, если $a \not\subset A$

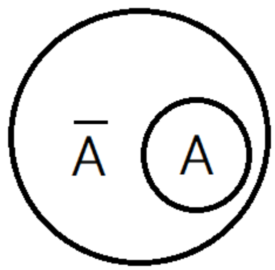
$\chi_A(a) = 1$, если $a \subset A$



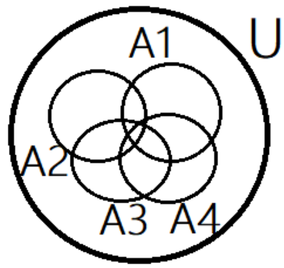
Свойства
1) χ_A и χ_B
Тогда $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$



$\overline{\mathrm{A}} = U - A$ - дополнение A
$\chi_{\overline{\mathrm{A}}} = 1 - \chi_A$



3) $\chi_{A\cup B} = 1 - \chi_{\overline{\mathrm{A\cup B}}} = 1 - \chi_{\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}}} = 1 - \chi_{\overline{\mathrm{A}}} - \chi_{\overline{\mathrm{B}}}$
$A \cup B = \overline{\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}}$
$= 1 - (1 - \chi_A)(1 - \chi_B) = \chi_A + \chi_B - \chi_A + \chi_B$
4)$\chi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots A_n} = \chi_A * \dots * \chi_{A_n}$
5) $|A| = \sum_{a=u} \chi_A(a)$
Доказательство формулы включений-исключений
$\chi_A = \chi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots A_n} = 1 - (1 - \chi_{A_1})(1 - \chi_{A_2})\dots(1 - \chi_{A_n})$
Добавим с обеих сторон $\sum_{a=u}$
$|A| = \sum_{a=u}(1 - 1 + \chi_{A_1} + \chi_{A_2} + \dots + \chi_{A_n} - \chi_{A_1}\chi_{A_2} - \chi_{A_1}\chi_{A_3} - \dots - \chi_{A_{n-1}}\chi_{A_n} + \chi_{A_1}\chi_{A_2}\chi_{A_3} + \dots = |A_1| + |A_2| + \dots |A_n| - |A_1 \cap A_2|$
Пример:
Сколько четырехзначных чисел содержит 1?
Решение 1
Всего четырехзначных - четырехзначные без 1
$9 * 10^3 - 8 * 9 * 9 * 9$
Решение 2



все четырехзначные = U

A_i - четырехзначные с 1 на i-том месте

$A_1 = \{1213, 1576, 1888...\}$

$A_2 = \{1213, 1518, 1111...\}$

$|A| = |A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_1 \cap A_4|-|A_2 \cap A_3|-|A_2 \cap A_4|-|A_3 \cap A_4|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_4|+|A_2 \cap A_3 \cap A_4|-|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10^3 + 3 * 9 * 10^2 - 3 * 10^2 - 3 * 9 * 10 + 2 * 10 + 9 - 1$

Задача о счастливых билетах

Билет - 6 цифр

Билет счастливый, если сумма первых трех цифр равна сумме трех последних

Сколько счастливых билетов?

Шаг 1. Взаимно однозначное соответствие

Пусть abcdef - счастливый билет

$abcdef \leftrightarrow abc(9-d)(9-e)(9-f)$

Например, $123051 \leftrightarrow 123948$

$a + b + c + (9 - d) + (9 - e) + (9 - f) = 9 + 9 + 9 = 27$

Множество счастливых билетов взаимно однозначно соответствует множеству билетов с суммой цифр 27

Сколько билетов с суммой цифр 27?

Версия для компьютера

$(1 + x + x^2 + ... + x^9)^6 = ...$

Коэффициент перед x^{27} - ответ этой задачи.