Лекция по дискретной математике

22 апреля 2019

Задача интерполяции
Поле $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$
$\underline{\text{Задача интерполяции}}$
Разложить $X^4 + x^3 - x - 1$ в $\mathbb{R}$
Найти мн-н p, такой что $p(x_i) = y_i$, где $x_i, y_i \in F$ $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$
Например: $p(0) = 1, p(1) = 1, p(2) = 3$
Задача интерполяции
Для задачи интерполяции $p(x_i) = y_i$, где $1 \leq i \leq n \exists!$ мн-н p, решение $degp \leq n - 1$
Д-во: 1)!
p и q подходят $\underbrace{p(x) - q(x)}$ имеет корни x_i $p(x_i = q(x_i) = y_i \Rightarrow$
$p(x) - q(x) = 0$ (нулевой многочлен)
Замечание: если степень не ограничить, то $p(x) - q(x) = (x - x_1)(x - x_1)...(\mathcal{Y} - x_n)\mathcal{Y}(\lambda)$
т.е. если p(x) подходит, то $p(x) = p_0(x) + \sqcap_{n=1}^{n}(x - x_1)r(x)$ при этом $deg \leq n - 1$
2) $\exists$
1.Метод Лагранжа явная ф-ма:
Σ_{i-1}^{i}

$$\underbrace{y_i \frac{\sqcap_{j=1, j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\sqcap_{j=1, j\neq i}^{n}(x - x_j)}}_{p_i(x)}$$

Пример: $p(0) = 1; p(1) = 1; p(2) = 3$

$$1.\ \underbrace{\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}}_{p_1(x)} + 1 \underbrace{\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}}_{p_2(x)} + 3 \underbrace{\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}}_{p_3(x)}$$

Ответ: $x^2 - x + 1$
почему подходит условие?
$p_i(x), p_i(x_i) = 1, p_i(x_j) = 0$
Ответ: $y_1 P_1(x) + y_2 P_2(x) + ... + y_n P_n(x)$ подставим $x - x_i \Rightarrow$
$y_1 0 + y_2 0 + ... + y_n 0 \pm 9$

2.Метод Ньютона:

Начинаем с мн-на $p_1(x) - y_1$ он подходит под $p_1(x_1) = y_1$-одно ур-ие

$p_2(x)$-должен подойти под 2 ур-ия $(q + (x_1) = y_1, p_2(x_1) = y_2)$

$p_2(x) - p_1(x) + (x - x_1)\alpha$ подбираем α

$p_{k+1}(x) = p_k + (x - x_1)...(x - x_k)\alpha$

Определение

Нод-p(x) и q(x)-это мн-н d(x)

1) $p(x)\vdots d(x)$ |

$q(x)\vdots d(x)$ | $p(x) = d(x + u(x))$

2) d(x)-наиб степень

Все старые Th. сокращаются

Например: $d(x)\vdots d(x)$, если d(x)-общий делитель p(x) и q(x)

Если $d_1(x)$ и $d_2(x)$ - НОД p(x) и q(x), то $d_1(x)\vdots d_2(x)$ и $d_2(x)\vdots d_1(x) \Rightarrow d_1(x) = d_2(x) * u(x)$

Все НОД отличаются умножением на const, т.е $d_1(x) \backsim d_2(x)$

Можно расшифровать только d(x) со старшим коэф.=1 Нод(...) $= x + 1$

Алгоритм Евклида для мн-в не отличается от обычного.

Пример:

$5x^2 - 6x + 1$ | $3x^2 + 2x - 5$ в $\mathbb{R}$

Числитель: $5x^2 - 6x + 1$

Делитель: $3x^2 + 2x - 5$

Остаток: $\frac{28}{9}x + \frac{13}{9}$

Ответ: $\frac{5}{3}$

$5x^2 - 6x + 1$(1,0) $3x^2 + 2x - 5$(0,1)

$-\frac{28}{3}x + \frac{28}{3}$(1,-(5/3) $3x^2 + 2x - 5$(0,1)

НОД (p(x),q(x))-НОД $(\alpha p(x), \beta q(x))$ α, β-число

$-x + 1(3/28; -(5/28))$

$-x + 1(2/28; -(5/28))$

Ответ: $-x + 1 = \frac{3}{28}$ $(5x^2 - 6x + 1)$ $-\frac{5}{28}$ $(3x^2 + 2x - 5)$

Аналогично числам, есть простые мн-ны-неприводимые.

Неприводимые мн-н нельзя представить в виде произведения двух мн-ов строго меньших степеней.

Неприводимость-трудно проверить в общем случае.

$x^2 + 1$ над $\mathbb{R}$ $x^2 + 1 = (x + \alpha)(x + \beta)$

$x^2 + 1$ над $\mathbb{C}$ $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$

$x^2 + 1$ над $\mathbb{Z}$ $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1)$

Утверждение 1.

НОД $\mathbb{C}$ неприводимы только мн-ны первой степени $\alpha x + \beta$ $\alpha \neq 0$

Утверждение 2.

НОД $\mathbb{R}$ неприводимы только мн-ны $\alpha x + \beta$ и $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, где $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$

Утверждение 3.

Приводимость над $\mathbb{Q} \Leftrightarrow \mathbb{Z}$

Д-во:

$p(x) = q(x) * \gamma(x)$
$p(x) = \frac{1}{MN}(M_p(x))(N_q(x))$
рассмотреть k простой делитель из MN
<u>Утверждение</u> $f(x)$ приводим в $\mathbb{Q} \Rightarrow f(x)$ приводим в $\mathbb{Z}$
Д-во: $f(x) = g(x)h(x)$ целый коэф. рассмотрим по mod p
$f(x) \overset{\text{p}}{\equiv} g(x)h(x)$
Критерий Эйзенштейна
Приводимость над ()
$a_n x^n + a_1 x + a_0$
если $a_n \vdots dp$, $a_1 \vdots p$, $a_0 \vdots p^2$ мн-н неприводим
Пример: $x^3 + 2x^2 + 4x - 2$ непр.(при $p = 2$)
Д-во: $a_n x^x + \cdots + a_0 = b_m x^n + \cdots + b_0 = c_k x^x + \ldots c_0$
$b_0 c_0 + a_0 ip \Rightarrow b_0$ или $c_0 \vdots p$