Конспект по дискретной математике.

Киселев Д.А 8371

25 марта 2019 г.

11.02.19

1 Алгоритмы с целыми числами.

Опр: Деление с остатком.

Поделить $a \in Z$ на $b \in Z \setminus \{0\}$ - это найти q,$r \in Z$:

1. $a = b \cdot q + r$ 2. $0 \leqslant r \leqslant |b|$

a -Делимое b -Делитель q -неполное частное r -остаток

Примеры:

± 7 поделить на 3

$7 = 3 \cdot 2 + 1$ $a = b \cdot q + r$

$7 = 3 \cdot 4 + (-5)$ Не является делением с остатком, так как $r < 0$

$-7 = 3 \cdot (-2) + (-1)$

Утверждение: деление с остатком единственно

Док-во:

Пусть существуют $a = b \cdot q_1 + r_1$ и $a = b \cdot q_2 + r_2$ при $0 \leqslant r_1, r_2 \leqslant |b|$

Вычтем из первого второе и получим: $0 = b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$

$b(q_2 - q_1) = r_1 - r_2$

b может принимать значения 0 или $\pm b, \pm 2b, \pm 3b$...

$r_1 - r_2$ принадлежит интервалу $(-|b|; |b|)$, значит b $\neq \pm b, \pm 2b, \pm 3b$...

$b = 0$, когда $q_1 = q_2 \Rightarrow 0 = r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 = r_2$

Доказано то, что и требовалось доказать.

Определиние: $a \in Z$, $b \in Z$

$a \vdots b$

a делится на b (a кратно b), если остаток от деления a на b равен нулю

Перефраз: $a \vdots b$, если существует $q \in Z$ и $a = b \cdot q$ Примеры:

$9 \vdots 3$ $12 \vdots 4$ $0 \vdots 5$

Свойства делимости:

1.$\forall x \in Z \qquad x \vdots 1$

2.$\forall x \in Z \backslash \{0\} \qquad x \vdots x$

3.$\forall x,y,z \in Z$ $x \vdots y$ $y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$ Транзитивность

4.Если $x \vdots y \Rightarrow \pm x \vdots \pm y$

5.Если $x_i \vdots y$, то $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \vdots y$ при $\lambda_i \in Z$

План док-ва 5 свойства:

1. $x \vdots y \Rightarrow \lambda x \vdots y$

$x \vdots y \lambda \Rightarrow \lambda x = y(\lambda q)$

2. $x_1 \vdots y$ и $x_2 \vdots y \Rightarrow (x_1 + x_2) \vdots y$

$x_1 = yq_1 x_2 = yq_2 \Rightarrow (x_1 + x_2) = y(q_1 + q_2)$

Обозначим:

$amodb$ -остаток от деления a на b

Пример: $7mod3 = 1$ $-7mod3 = 2$

Системы счисления:

Определение:

P система счислений (пэичная система счислений)

Числа записываются цифрами, цифр ровно p штук - от 0 до p-1.

Пример цифр в различных с/сч:

в 3ной: 0,1,2

в 16ной: 0,1...9,A,B,C,D,E,F

Число $x \in N$ записываеься $x = (C_n, C_{n-1} \ldots C_0)_P$, где C_i -цифры. P -основание с/сч

$x = C_n \cdot P^n + C_{n-1} \cdot P^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot P + C_0$

Пример:

$57121_{10} = 5 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$

Утверждение: Для любого N и $p \in N$

1. Существует представление в Ричной с/сч

2. Это представление единственно, если запретить нулевые цифры в начале

Док-во:

2) Пусть

$x = (C_n \ldots C_0) = C_n \cdot P^n \ldots + C_1 \cdot P + C_0 = P(Y_1) + C_0$

$x = (d_n \ldots d_0) = d_n \cdot P^n \ldots + d_1 \cdot P + d_0 = P(Y_2) + d_0$

Получисли деление с остатком x на p. $0 \leq c_0, d_0 < p$

Т.к деление с остатком единственное, значит представление единственное

$C_0 = d_0 \Rightarrow Y_1 = Y_2$

Аналогично $C_1 = d_1$ и т.д $\Rightarrow C_i = d_i$