25.02.19

Фибоначчиева система счисления

<u>Утверждение:</u> Если делятся индексы, то делятся и числа.

<u>Определение:</u> Фибоначчиева система счисления: $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}_{\,\varphi} = \sum_{i=0}^{n} a_i F_{i+2}$, $a_i \in \{0, 1\}$.
В записе числа не могут стоять две единицы подряд.

Примеры:

$7 = F_3 + F_5 = 1010_\varphi$

$8 = F_6 = 10000_\varphi$

<u>Утверждение:</u> $\overline{b_n b_{n-1}\ldots b_0}_{\,\varphi} < \overline{b_{m+1}00\ldots0}_{\,\varphi}$

Теорема:

Любое n ϵ N (включая 0) можно представить в Фибоначчиевой системе счисления, и это представление единственное.

Доказательство:

1) Дано число n.

Найдём: $F_k \le n \le F_{k+1}$

$F_{k-1} = F_{k+1} - F_k > n - F_k \ge 0$

и т.к. n = 10, то нет двух единиц подряд

2) Единственность:

$n = \overline{a_n a_{n-1}\ldots a_0}_{\,\varphi}$

$n = \overline{b_n b_{n-1}\ldots b_0}_{\,\varphi} < \overline{b_{m+}100\ldots0}_{\,\varphi}$, $m+1 \le n$

$\rightarrow m = n \rightarrow$ из n можно убрать F_{n+2}: $n - F_{n+2}$ — разложение единственно.

Арифметические действия над числами в Фибоначчиевой системе счисления

1)
```
  101001
+     10
  101011
    ↓
  101100
    ↓
  110000
    ↓
  1000000 φ = 21
```

2)
```
  1000
+ 1001
  2001
    ↓
  1121
    ↓
  10021
    ↓
  10110
    ↓
  11000
    ↓
  100000 φ = 13
```

Наибольший общий делитель

Даны a, b ϵ Z

- Наибольший общий делитель — d: a⁝d и b⁝d

  НОД a и b ↔ (a,b)
- Наименьшее общее кратное — m: m⁝a и m⁝b

НОК a и b ↔ [a, b]

Определение: 1) Общий делитель a и b — это d: a⁝d и b⁝d; 2) Общее кратное a и b — это m: m⁝a и m⁝b.

Пример:

(20, 30) = 10, [20, 30] = 60

Замечание:

1 — общий делитель для любых a и b.
ab — общее кратное a, b.

Следствие к замечанию

(a, b) ≥ 1,   [a, b] ≤ ab

Утверждение: 1) Если d — общий делитель a и b, то (a, b) ⁝ d; 2) m — общее кратное a и b, то m ⁝ [a, b].

Доказательство:

2) Делим с остатком m на [a, b]:
   m = [a, b]q + r
   ………………
   a   q   → r ⁝ a (аналогично r ⁝ b)
   → r — общее кратное a и b, но 0 ≤ r ≤ [a, b] → среди натуральных чисел [a, b] — min, которое делится нацело на a и b.
   → r = 0 → m ⁝ [a, b].

Утверждение: ab = [a, b](a, b).

В примере (20б 30)[20, 30] = 10*600 = 20*30

Доказательство:

[a,b] ≠ $\frac{ab}{(a,b)}$

$\frac{ab}{(a,b)}$ — целое число

$\frac{ab}{(a,b)}$ ⁝ a, b → $\frac{ab}{(a,b)}$ — общее кратное

→ $\frac{ab}{(a,b)}$ ⁝ [a, b] → $\frac{ab}{(a,b)}$ = q[a, b] → $\frac{a}{(a,b)q} = \frac{[a,b]}{b}$ и $\frac{b}{(a,b)q} = \frac{[a,b]}{a}$ → (a, b)q — общий делитель a и b → (a, b) ≥ (a, b)q

При q = 1 $\frac{ab}{(a,b)}$ = [a, b]

Утверждение: Пусть ab ⁝ c и (a, c) = 1 → b ⁝ c.

Пример:

14*30 ⁝ 5, (14, 5) = 1,
→ 30 ⁝ 5

Доказательство:

$\frac{ab}{c}$ = q

$ab = cq$, и т.к. $(a, c) = 1$, то $b \vdots c$