

Лекция по дискретной математике

11 сентября 2019

Напоминание: Формула имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией нескольких конъюнкций

Замечание: по ДНФ легко считать значение выражения.

Выражение истинно \Leftrightarrow есть хотя бы один конъюнкт, который истинен

Конъюнкт истинен \Leftrightarrow все литералы истинны.

Пример: $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}z$

Конъюнкт $x\bar{y}z$ истинен $\Leftrightarrow x = 1, y = 0, z = 1$

Замечание: Задача поиска значений переменных, при которых формула в ДНФ ложна - это вычислительно сложная задача. Не известно алгоритмов, которые в общем случае быстрее полного перебора значений переменных.

Приведение к ДНФ

Задача. Дана логическая формула, необходимо получить эквивалентную, но в ДНФ

1. Метод алгебраических преобразований

Преобразования:

- см. все преобразования, которые были до этого

- ДНФ всех логических связей

$x \cdot y$ - ДНФ

$x \vee y$ - ДНФ

$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$ (2 конъюнкта по 1 литералу)

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee \bar{y}y \vee yx = \bar{x}\bar{y} \vee xy$

$x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$

Осталось только $x + y$

$x + y = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y} = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}vx = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{x}$

Запомним: $x + y = \bar{x}\bar{y} \vee y\bar{x}$

Пример преобразования:

$(x \Leftrightarrow yz) \Rightarrow x = \bar{x} \Leftrightarrow \bar{y}\bar{z} \vee x = (x + yz) \vee x = (x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz) \vee x = x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz \vee x = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x$ - ДНФ исходной формулы

2. Получение ДНФ по таблице истинности

Пусть дана таблица истинности с n переменными

x_1	...	x_n	логическая формула
0	...	0	0
...	1
...	0
1	1	1	1

Рассмотрим строки с 1 в столбце значений. Это строки:

$$x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)}$$

$$x_1^{(2)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)}$$

$$\dots$$

$$x_1^{(k)} x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)}$$

Таких строк k штук.

Составим ДНФ:

k конъюнктов, конъюнкт номер i имеет вид

$$\overline{x_1} \overline{x_2} \dots \overline{x_n}$$

$\overline{x_1}$ отрицательно, если $x_1^{(i)} = 0$

$\overline{x_2}$ отрицательно, если $x_2^{(i)} = 0$

$\overline{x_n}$ отрицательно, если $x_n^{(i)} = 0$

Пример: $(x \Leftrightarrow yz) \Rightarrow x$

Когда эта формула равна 0?

Когда $x \Leftrightarrow yz = 1$, а $x = 0$, т.е. $x = 0, yz = 0$

x	y	z	$(x \Leftrightarrow yz) \Rightarrow x$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$x = 0, y = 1, z = 1 \Rightarrow \overline{x}yz$$

$$x = 1, y = 0, z = 0 \Rightarrow x\overline{y}\overline{z}$$

$$x = 1, y = 0, z = 1 \Rightarrow x\overline{y}z$$

$$x = 1, y = 1, z = 0 \Rightarrow xy\overline{z}$$

$$x = 1, y = 1, z = 1 \Rightarrow xyz$$

ДНФ: $\overline{x}yz \vee x\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$

Теорема: ДНФ, построенная этим методом, эквивалентна исходной формуле

Доказательство: Проверим, что ее таблица истинности такая же

$$\overline{x}\overline{y} \vee x\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x$$

Конъюнкт для строки i

$$x_1^{(i)} x_2^{(i)} \dots x_n^{(i)}$$

равен 1, только если $x_1 = x_1^{(i)}, x_2 = x_2^{(i)} \dots x_n = x_n^{(i)}$

Его таблица истинности:

$x_1 \dots x_n$	$x_1^{(-?)}, x_2^{(-?)}, \dots, x_n^{(-?)}$
...	0
$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$	1
...	0
...	0
...	0

Дизъюнкция всех конъюнктов дает таблицу истинности, совпадающую с исходной.

Минимальная ДНФ

Замечание. Может быть много эквивалентных ДНФ.

Пример: $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x$

Можно ли найти самую короткую? (считаем литералы и дизъюнкции, 19 против 11)

Поиск самой короткой - вычислительно сложная задача. Если бы мы умели решать ее эффективно, мы бы могли эффективно решить задачу проверки на возможность нуля.

Поэтому поиск минимальной ДНФ - перебор. Как его оптимизировать?

В примере можно сделать короче:

$x \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}yz = x(1 \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \vee \bar{x}yz = x \vee \bar{x}yz$. Получилось 5 символов.

Можно ли короче?

Вспомним, что $a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)$

$x \vee \bar{x}yz = (x \vee \bar{x})(x \vee yz) = x \vee yz$

Получили 4 символа: $x \vee yz$

Замечание: Идеи упрощений ДНФ

1) $\bar{x} \square \vee x \square = \square$

(Если два конъюнкта отличаются одной переменной)

2) $x\bar{y}\square \vee x\bar{y}\square \vee \bar{x}y\square \vee \bar{x}y\square = \square$

3) Повтор конъюнктов:

Пример: $\bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z = \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z = yz \vee xz$

Метод поиска min ДНФ - метод n-мерного кубика

Каждая вершина - конъюнкт, координата из 0 и 1. 1 - нет отрицания в литерале, 0 - есть отрицание.

Ребро - это конъюнкт из двух переменных. yz - это ребро $y = 1, z = 1, \bar{x}$ - это ребро $x = 0, z = 0$

А что значит $\bar{x}yz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z = z$

Это 4 вершины = грань.

Грань - это конъюнкт из 1 литерала

