

Лекция по дискретной математике

4 сентября 2019

Исчисление высказываний

Логическая формула - выражение со значением (0, 1), переменными (x, y...) и операциями (*, v, =>...)

Арифметические выражения. Пример: $(2 + x) + y - 10$

Логические выражения. Пример: $(1 + \bar{x}) \Rightarrow (xy \Leftrightarrow \bar{y}z)$

Операции:

Унарная операция отрицание

x	\bar{x}
0	1
1	0

Бинарные операции

x	y	$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$	$x+y$	0	$x \Delta y$	$x \nabla y$
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

x	y	x	y	$x \downarrow y$	\bar{y}	$y \Rightarrow x$	\bar{x}	$x y$	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	0	0	1

Свойства операций

$\&, \cdot, \vee, \Leftrightarrow, +$ - коммутативны

$x \cdot y = y \cdot x$ умножение

$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$ равенство

$x \vee y = y \vee x$

$x + y = y + x$ сумма в Z_2

Универсальный способ проверить равенство двух логических выражений - это сравнить значения выражений при всех возможных значениях переменных

$x \Rightarrow y$ не коммутативно. Проверка:

x	y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0	0	$0 \Rightarrow 0 = 1$	$0 \Rightarrow 0 = 1$
0	1	$0 \Rightarrow 1 = 1$	$1 \Rightarrow 0 = 0$

Дальше можно не продолжать, т.к. результаты не совпали

Ассоциативность

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \vee z$	$y \vee z$	$x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ умножение ассоциативно $(x + y) + z = x + (y + z)$ сложение по Z_2 ассоциативно

$$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$$

$$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z \stackrel{?}{=} x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$$

Проверка по таблице истинности:

x	y	z	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
0	0	0	0	1

Несовпадение в первой же строке, дальше можно не проверять.

В записи логических выражений у ассоциативных операций $()$ не нужны

Приоритет

$$x \vee yz \Rightarrow \overline{x}y$$

1. Отрицание
2. Умножение, конъюнкция
3. Дизъюнкция
4. \vee , $+$
5. \Rightarrow , \Leftrightarrow

Правила де Моргана

$$\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$

Проверим второе правило с помощью таблицы истинности

x	y	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x} \vee \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Дистрибутивность

$$x \cdot (y \vee z) = xy \vee xz$$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz$$

$$x \vee (yz) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

$$x + (y \cdot z) \neq (x + y)(x + z)$$

Еще набор свойств:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

$$0x = 0$$

$$1x = x$$

$$0 \vee x = x$$

$$1 \vee x = 1$$

$$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y \text{ (см таблицу истинности)}$$

Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

Нормальная форма - один из вариантов записи логического выражения

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee z \vee 0 = xy + z + xyz$$

$xy \vee z$ - ДНФ

Определение: Выражение имеет ДНФ, если оно является дизъюнкцией нескольких конъюнкций

Конъюнкт - это конъюнкция литералов

Литерал - переменная или отрицание переменной

Пример: $xy \vee z$, где xy и z конъюнкты, а x, y, z - литералы

$x\overline{y}z \vee x\overline{y}\overline{z} \vee \overline{y}z$ - 3 конъюнкта

\overline{x} - ДНФ, 1 конъюнкт из 1 литерала

Не являются ДНФ:

$$\cdot x \vee 1$$

$$\cdot (x \vee y) \cdot z$$

$$\cdot x \vee y \vee z \vee x \Rightarrow y$$

$$\cdot x + y$$