

Лекция №1

Владислав Рожков

10 октября 2019 г.

1 Исчисление высказываний

Логическая формула - это выражение с:

- Переменными значениями $(0, 1)$
- Переменными (x, y, \dots)
- Операциями $(\cdot, \vee, \Rightarrow, \dots)$

Пример арифметического выражения:

$$(z + x) + y = 10$$

Пример логического выражения:

$$(1 + !x) \Rightarrow (xy \Leftrightarrow !y!x)$$

Где 1 - это значение; x и y - переменные; !, \Rightarrow , \Leftrightarrow - операции.

Отрицание (!) - операция с одной переменной:

x	$!x$
0	1
1	0

Наиболее используемые логические операции с двумя переменными:

x	y	xy	$x \vee y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Где:

- xy - конъюнкция $(x \cdot y)$;

- $x \vee y$ - дизъюнкция;
- $x \Rightarrow y$ - импликация/следствие;
- $x \Leftrightarrow y$ - эквивалентность.

Остальные логические операции с двумя переменными:

x	y	$x + y$	0	$x \triangle y$	$x \nabla y$	x	y	$x \downarrow y$	$\neg y$	$y \Rightarrow x$	$\neg x$	$x y$	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1

2 Свойства операций

Коммутативность ($\cdot, \vee, \Leftrightarrow, +$):

$$xy = yx$$

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$$

$$x + y = y + x$$

Операция \Rightarrow не коммутативна:

$$x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$$

Ассоциативность ($\cdot, \vee, \Leftrightarrow, +$)

Проверим ассоциативность дизъюнкции:

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

Универсальный способ проверить равенство двух логических выражений - это сравнить их результаты при всех возможных случаях:

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y) \vee z$	$y \vee z$	$x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Операция \Rightarrow не ассоциативна

Приоритет операций (От более важных к менее):

1) $!$ - отрицание

2) \cdot - конъюнкция

3) \vee - дизъюнкция и $+$ - строгая дизъюнкция (исключающее или)

4) \Rightarrow - импликация и \Leftrightarrow - эквивалентность

Правила Де Моргана:

$$!(x \vee y) = !x \cdot !y$$

$$!(x \cdot y) = !x \vee !y$$

Дистрибутивность:

$$x \cdot (y \vee z) = xy \vee xz$$

$$x \cdot (y + z) = xy + xz$$

$$x \vee (yz) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$$

Другие свойства:

$$!x = x$$

$$0x = 0$$

$$1x = x$$

$$0 \vee x = x$$

$$1 \vee x = 1$$

3 Дизъюнктивно-нормальная форма

Нормальная форма - один из вариантов записи выражений:

$$xy \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z) = xy + z + xyz$$

Литерал - переменная или отрицание переменной

Выражение имеет дизъюнктивно-нормальную форму если имеет дизъюнкцию множества конъюнкций:

$x \cdot !y \cdot z \vee x \cdot !y \cdot !z \vee z \cdot !y$ - данная ДНФ имеет 3 конъюна

$x \cdot !y \cdot z$ - 1 конъюн

$x \vee y \vee !z$ - 3 конъюна

$!x$ - 1 конъюн