Лекция 8

30 октября 2019

1 Исчисление предикатов

Исчисление высказываний:
есть логическая функция,
переменные в функциях пропорциональные: 0 или 1.
Легко перебирать все возможные значения переменных.

Исчисление предикатов: переменные - **предметные**.
принимают значения = элементы непустого множества, т.е. можно формулировать утверждения про элементы какого-то множества (числа, студенты, слова, ...).
Итак, чтобы начать формулировать утверждения, заводим множество $M \neq \varnothing$.

Опр. Предикат - это функция $P : M^k \to \mathbb{B}$
$\mathbb{B} = \{\mathbb{0}, \mathbb{1}\}$, где $\mathbb{0}$ - ложь, $\mathbb{1}$ - истина.

Примеры.
$M = \mathbb{Z}$
$P_1(x) = x \geqslant 0$ - предикат: число положительное.
$P_2(x) = x^2 + 1 \geqslant 7$
$P_3(x) = x$ содержит 1 в десятичной записи.
Например, $P_3(238) = \mathbb{0}, P_3(-571) = \mathbb{1}$
$P_4(x, y) = x > y$
$P_5(x, y) = x^2 + y^2 = 25$
Например, $P_5(7, 8) = \mathbb{0}, P_5(3, 4) = \mathbb{1}, P_5(0, 5) = \mathbb{1}$.
$P_6 = \mathbb{0}$ - k = 0 (нет переменных).
$P_7 = \mathbb{1}$
$P_8(x, y) = x$ посещал лекции чаще y в этом семестре. M - студенты этого потока.

Опр. Функции. $f : M^k \to M, k \geqslant 0, k \in \mathbb{Z}$.
Функции превращают один или несколько элементов множества в элемент множества.

Примеры. $M = \mathbb{Z}$
$f_1(x, y) = x + y$
$f_2(x, y) = x^2 + y - 1$
$f_3(x, y) = \begin{cases} y & \text{если } x \text{ - четное;} \\ 42 & \text{если } x \text{ - нечетное.} \end{cases}$
Например, $f_3(2, 5) = 5, f_3(7, 8) = 42$.
$f_4(x) = x^2$
$f_5(x) = x$ без цифр 1 в 10-й записи. $f_5(412) = 42, f_5(57121) = 572, f_5(111) = 0$.
$f_6 = 7, k = 0$ - константа.
На множестве M={Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф}.
$f_7(x, y) =$ третий студент (кроме x и y).
Обязательно нужно доопределить $f_7(x, y) = x$, если $x = y$.

Замечания.

1)предикаты - заглавные буквы P, Q, R, A, B, ...
функции - строчные буквы f, g, h, ...
константы - начало алфавита a, b, c, ...
2) некоторые функции и предикаты можно записать привычно в инфиксной форме: $x > y$ вместо $P(x, y) : > (x, y)$.
$x + y$ вместо $+(x, y)$.
x^y вместо $g(x, y)$, где g - возведение в степень.

Опр. Формула исчисления предикатов.
Содержит:
предикатные символы
функциональные символы
предметные переменные
кванторы

Подопределение.
Терм:
переменная
функциональный символ (..., ..., ...) - внутри скобок находятся термы.
Пример. $\rceil\ x, y, z$ - переменные.
$\rceil\ f, g, a$ - функциональные символы. Количество аргументов: для $f = 1, g = 2, a = 0$.
$x \quad f(f(x)) \quad f(g(x, g(a, f(y))))$
$f(x) \quad f(g(x, y))$

Формула исчисления предикатов -
а) это предикатный символ(терм, терм, ...) от нескольких термов.
б) $\forall x$ формула исчисления предикатов со свободной переменной x.
в) $\exists x$ формула исчисления предикатов со свободной переменной x.
Все переменные внутри термов свободны.
В последних двух пунктах переменная x перестает быть свободной - становится связной.
$\neg$ФИП, ФИП $\Rightarrow$ ФИП

Замечание. ФИП - это выражение предиката через другие предикаты и функции. При этом смысл функций и предикатов не важен. Но если смысл будет задан, то получится конкретный предикат.

Примеры.
1.P(x,y), где x и y - термы (переменные), P - предикатный символ.
Интерпретация: задать M и смысл P.
1)$M = \mathbb{Z}$ $\quad P(x, y) : x > y$
2)M - студентов $\quad P(x, y)$: x чаще ходит
Обе переменные x, y свободны.
Это значит, что им можно назначить какое-то значение, и тогда результат вычисления формулы - истина или ложь.
$x = 5, y = 7. \quad P(x, y) = \mathbb{0}$
$x = 4, y = 2. \quad P(x, y) = \mathbb{1}$
2. P(x,a), где x - переменная (терм), a - константа (терм), P - предикатный символ.
Интерпретация: P-?, a-?, M-?
1) $M = \mathbb{Z}, a = 7$
$x = 8 : \mathbb{1}$
$x = 6 : \mathbb{0}$
одна свободная переменная x.
3. $P(x) \vee Q(x)$
Интерпретация. P-?, Q-?, M-?
1) $M = \mathbb{Z}$
$P(x) = x$ - четное

$Q(x) = x$ - нечетное
Свободные переменные: x.
$x = 1 \quad \mathbb{0} \vee \mathbb{1} = \mathbb{1}$
$x = 10 \quad \mathbb{1} \vee \mathbb{0} = \mathbb{1}$
x - неважно. Результат $= \mathbb{1}$.

4. $\forall x \;\; P(x, y)$
Интерпретация: M-? P-?
Свободны: y (x - связан).
1)$M = \mathbb{Z}, P(x, y) : x \geqslant y$
$y = 0 \;\; \forall x \;\; P(x, 0) \Leftrightarrow \forall x \;\; x \geqslant 0$. Результат $= \mathbb{0}$.
Чтобы вычислить $\forall x \quad P(x)$ надо проверить, что $P(x)$ всегда $\mathbb{1}$ при всех $x \in M$.
2) $M = \mathbb{N} \;\; P(x, y) : x \geqslant y$
$\forall x \;\; P(x, y)$
при $y = 1 \rightarrow \mathbb{1}$
при $y = 2 \rightarrow \mathbb{0}$

Замечание. Чтобы вычислить значение формулы исчисления предикатов, надо:
-интерпретация, т.е. M-?
Задать смысл предикатов и задать множество функциональных символов.
- задать значения свободных переменных. Без этого мы получим не $\mathbb{0}, \mathbb{1}$, а предикат.
т.е. $\forall x \;\; P(x, y) = Q(y)$ - предикат от y.

5. $\exists x (\forall y \;\; P(x, y))$
свободные переменные: нет.
Интерпретации:
1) $M = \mathbb{Z} \;\; P(x, y) : x \leqslant y$
$\forall y \;\; P(x, y) = Q(x)$ - обозначим.
или $Q(x) = \forall y \;\; x \leqslant y$.
$Q(0) = \forall y \;\; 0 \leqslant y = \mathbb{0}$
$Q(-1) = \forall y \;\; -1 \leqslant y = \mathbb{0}$
$Q(...) = \forall y \;\; ... \leqslant y = \mathbb{0}$
$\Rightarrow Q(x) = \mathbb{0}$ независимо от x.
$\exists x \forall y P(x, y) = \exists x \;\; \mathbb{0} = \mathbb{0}$. можно подобрать $x \in M$ внутри 1. $\forall y P(x, y) = Q(x)$.
2) другая интерпретация
$M = \mathbb{N}$
$P(x, y) : x \leqslant y$
$\forall y P(x, y) = Q(x)$.
$Q(1) : \forall y \quad 1 \leqslant y = \mathbb{1}$
$Q(2) : \forall y \quad 2 \leqslant y = \mathbb{0}$
$\exists x Q(x) = \exists x = \begin{cases} x = 1 & \mathbb{1}; \\ else & \mathbb{0}. \end{cases} = \mathbb{1}$ - при x=1.

Еще примеры.
$M = \mathbb{N}$
$P(x, y) : x = y$
$f(x, y) = x + y$
$x > y = \exists k \quad x = y + k = (x, +(y, k))$
$x \vdots y = \exists k \quad x = y * k$