Лекция по МЛиТА

11 сентября 2019

Напоминание:

Форма имеет ДНФ если она = дзъюнкция конъюнктов.

$xy \vee \neg x \neg z \vee xz \neg y$

Здесь x,y,z это литералы,а произведения $xy, \neg x \neg z, xz \neg y$ это конъюнкты.

Замечание:

По ДНФ легко считать значение выражения. Выражение истинно $\leftrightarrow$ есть хотябы один конъюнкт,который истинен. Конъюнкт истинен $\leftrightarrow$ все литералы истинны.

Пример:

Конъюнкт $x \neg yz$ истинен $\leftrightarrow$ x=1, y=0, z=1.

Замечание:

Задача поиска значений переменных,при которых формула в ДНФ ложна-это вычислительно сложная задача.

Не известно алгоритмов,которые в общем случае быстрее полного перебора знчений переменных.

Напоминание:

Задача:

Дана логическая формула,получить эквивалентную, но в ДНФ.

1. Метод алгебраических преобразований.

Преобразования:

-см. все преобразования,которые были.

-ДНФ всех логических связок:

xy -ДНФ

$x \vee y$ -ДНФ

$x \implies y = \neg x \vee y$ -ДНФ

$x \leftrightarrow y = (x \implies y)(y \implies x) = (\neg x \vee y)(\neg y \vee x) = \neg x \neg y \vee \neg xx \vee \neg yy \vee yx = \neg x \neg y \vee yx$

Осталось только x+y

$x+y = \neg(x \leftrightarrow y) = (*)$

xy	x+y	x $\leftrightarrow$ y
00	0	1
01	1	0
10	1	0
11	0	1

(*) = ¬ ((¬x ∨ y)(¬y ∨ x)) = Де Морган = ¬(¬x ∨ y) ∨ ¬(¬y ∨ x) = Де Морган = x¬y ∨ y¬x

Запомним:

x+y = x¬y ∨ y¬x

Пример преобразований:

(x ↔ yz) ⟹ x = ¬(x ↔ yz) ∨ x = (x+yz) ∨ x = (x ¬ (yz) ∨ yz¬x) ∨ x = x(¬y ∨ ¬z) ∨ yz¬x ∨ x = дистрибутивность = x¬y ∨ x¬z ∨ yz¬x ∨ x - ДНФ

2. Получение ДНФ по таблице истинности.

Пусть дана таблица истинности: n переменных

x1x2x3... xn	логическая формула
000... 0	0
.	1
.	0
.	0
111... 1	1

Рассмотрим строки с 1 в столюце значений это строки

$x1^1$ $x2^1$ ... xn^1 1

$x1^2$ $x2^2$ ... xn^2 1

. . .

$x1^k$ $x2^k$ ... xn^k 1

Таких строк k штук

Составим ДНФ:

k конъюнктов, конъюнкт номер i имеет вид:

¬x1¬x2...¬xn

где отрицание,если $x1^i = 0$

Пример:

xyz	(x ↔ yz) ⟹ x
000	0
001	0
010	0
011	1
100	1
101	1
110	1
111	1

Когда ⟹ равно 0?

Когда x ↔ yz = 1 и x = 0, т.е. x = 0 и yz = 0.

ДНФ:

¬xyz(4 строка) ∨ x¬y¬z(5 строка) ∨ xz¬y(6 строка) ∨ xy¬z(7 строка) ∨ xyz(8 строка)

Теорема:

ДНФ, построенная этим методом, эквивалентна исходной формуле.

Д-во:

Проверим,что ее ТИ так же конъюнктивна для строки i: $x1^i$ $x2^i$ ... xn^i равен 1 только если:

x1 = $x1^i$

x2 = $x2^i$

. . .

xn = xn^i

т.е. его таблица истинности:

x1...xn	$(\neg x1)^?$ $(\neg x2)^?$... $(\neg xn)^?$
	0
	0
	0
$x1^i$ $x2^i$ ... xn^i	1
	0
	0

Все 0,кроме 1 в строке номер i.

Дизъюнкция всех конъюнктов дает ТИ,совпадающую с исходной.

Минимальная ДНФ.

Замечание: Может быть много эквивалентных ДНФ.

Пример: ¬x y x ∨ x ¬y ¬z ∨ x y ¬z ∨ x ¬y z ∨ x y x = x ¬y ∨ x ¬z ∨ ¬x y z ∨ x

Можно ли найти самую короткую? (считаем литералы и дизъюнкции, 19 против 11)

Поиск самой короткой - вычислительно сложная задача. Если бы мы умели её решать эффективно, мы бы могли эффективно решить задачу проверки на возможность нуля: x y z ∨ x ¬y z ∨ ... - иногда 0, иногда 1.

x ∨ ¬x

y ∨ ¬y соответствуют 1.

Другой ответ: соответствует 0 или 1.

Поэтому поиск min ДНФ - перебор. Как его оптимизировать?

В примере можно сделать короче:

x ∨x ¬y ∨ x ¬z ∨ ¬x y z = x(1 ∨y ∨z) ∨ ¬x y z = x ∨ ¬x ∨ y z - 5 литералов.

Можно ли короче?

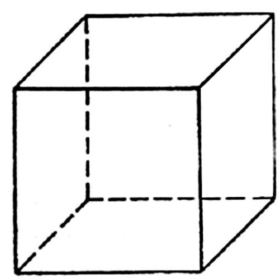
Вспомним

a ∨ b c = (a ∨ b)(a ∨ c)

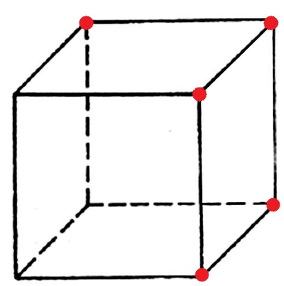
x ∨ ¬x y z = (x ∨ ¬x)(x ∨ y z) = x ∨ y z.

Получили 4 символа: x ∨ y z.

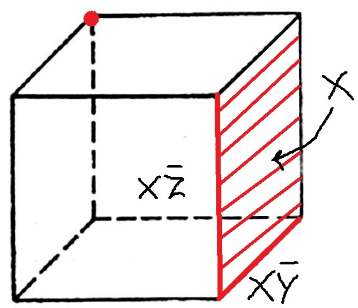
Замечание: Идеи упрощений ДНФ
1) $\neg x\ (...) \vee x\ (x...) = (...)$
Если 2 кон. отличаются только одной переменной.
2) $x\ y\ (...) \vee x\ \neg y\ (...) \vee \neg x\ y\ (...) \vee \neg x\ \neg y\ (...) = (...)$
Два схлопывания
3) Повторение Конъюнктов:
$\neg x$ н я $\vee\ x\ y\ z \vee x\ \neg y\ z$
лучше:
$\neg x\ y\ z \vee x\ y\ z \vee x\ y\ z \vee x\ \neg y\ z = y\ z \vee x\ z$ - Это min ДНФ.
Метод поиска min ДНФ.
У нас: метод кубика.



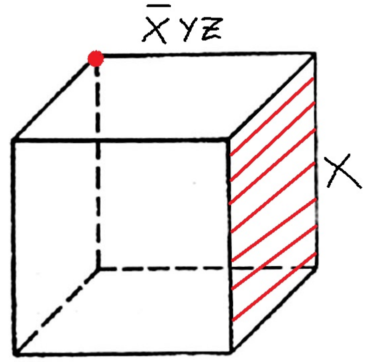
Каждая вершина - конъюнкт.
Оси x y z. Каждая Вершина - координата из 0 и 1.
1 - нет отрицания в литерале
0 - есть отрацание.
Как выглядит схлопывание?
$\neg x\ y\ z \vee x\ y\ z = y\ z$
Ребро - конъюнкт из двух переменных.
$y\ z$ - это ребра $y = 1$, $z = 1$
$\neg x\ \neg z$ - это ребро $x = 0$, $z = 0$.
Грань - это конъюнкт из 1 литерала.
Грань z - это грань $z = 1$.
Пример:
1) $\neg x\ y\ z \vee x\ y\ z \vee x\ y\ \neg z \vee x\ \neg y\ z \vee x\ \neg y\ \neg z$.



2) $x\ \neg y \vee x\ \neg z \vee \neg x\ y\ z \vee x$.



3) x ∨ ¬x y z.



4) x ∨ y z.