

# Конспект по математической логике и теории алгоритмов.

Киселев Д.А 8371

04.09.2019

## 1 Исчисление высказываний.

Логическая формула - это выражение со значениями  $(0,1)$ , переменными  $(x,y,z \dots)$  и операциями  $(\cdot, \vee, \implies \dots)$

Пример арифметического выражения:

$$\frac{(z + x) + y - 10}{2}$$

Логическое выражение:

$$(1 + x) \implies (xy \iff \bar{y}\bar{z})$$

1 - Значение  $x, xy, yz$  - Переменные  $\implies, \iff, \bar{y}\bar{z}$  - Операции.

Значения: 0 - ложь, 1 - истина

**Операции:**

### 1. Унарная операция:

- Отрицание  $\bar{\cdot}, \neg$

$x$	$\bar{x}$
0	1
1	0

Таблица 1: Отрицание

### 2. Бинарные операции:

$x$	$y$	$xy$	$x \vee y$	$x \implies y$	$x \iff y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Таблица 2: Бинарные операции

- Конъюнкция  $\wedge$ , &  
Логическое "И"
- Дизъюнкция  $\vee$   
Логическое "Или"
- Импликация  $\implies$   
X влечет Y, одно следует из другого
- Эквивалентность  $\iff$   
Проверка равносильности
- Исключающее "или"  
Сложение по mod 2

### 3. Другие операции:

$x$	$y$	<b>0</b>	$x \triangle y$	$x \nabla y$	$x$	$y$	$x \downarrow y$	$\bar{y}$	$y \implies x$	$\bar{x}$	$x y$	<b>1</b>
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1

Таблица 3: Другие операции

- Ноль **0**
- Запрет по Y  $x \triangle y$
- Запрет по X  $x \nabla y$
- X
- Y
- Стрелка Пирса  $x \downarrow y$
- Отрицание Y  $\bar{y}$
- Импликация  $y \implies x$
- Отрицание X  $\bar{x}$
- Штрих Шеффера  $x|y$
- Единица **1**

### Свойства операций:

### 1. Коммутативность

$\&, \vee, \iff, \oplus$  - коммутативны.

$$xy = yx \quad x \vee y = y \vee x \quad x \iff y = y \iff x \quad x + y = y + x$$

В данном случае, проверка может быть такой:

$xy = yx$  - Умножение.  $x \iff y = y \iff x$  - Равенство.  $x + y = y + x$  - Сумма в  $Z_2$

Универсальный способ проверки: Проверить равенство двух логических выражений с помощью таблицы.

$x$	$y$	$x \vee y$	$y \vee x$
0	0	$0 \vee 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$
0	1	$0 \vee 1 = 1$	$1 \vee 0 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$	$0 \vee 1 = 1$
1	1	$1 \vee 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$

Таблица 4: Проверка равенства выражений по таблице

### 2. Некоммутативность

$\implies$  - некоммутативная операция.

$$x \implies y \neq y \implies x$$

Проверка:

$x$	$y$	$x \implies y$	$y \implies x$	Проверка
0	0	$0 \vee 0 = 1$	$0 \vee 0 = 1$	+
0	1	$0 \vee 1 = 1$	$1 \vee 0 = 0$	-
1	0	$1 \vee 0 = 0$	$0 \vee 1 = 1$	-
1	1	$1 \vee 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$	+

Таблица 5: Проверка коммутативности импликации

В таблице видно, что импликация - некоммутативная операция.

### 3. Ассоциативность

- $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$  - Дизъюнкция.
- $(xy)z = x(yz)$  - Конъюнкция.
- $(x + y) + z = x + (y + z)$  - Исключающее "или".
- $(x \iff y) \iff z = x \iff (y \iff z)$  - Эквивалентность.

$x$	$y$	$z$	$x \vee y$	$(x \vee y) \vee z$	$y \vee z$	$x \vee (y \vee z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Таблица 6: Проверка ассоциативности дизъюнкции

**Неассоциативность:** Импликация.

$$(x \implies y) \implies z \neq x \implies (y \implies z)$$

#### 4. Дистрибутивность

- $x(y \vee z) = xy \vee xz$
- $x(y + z) = xy + xz$
- $x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$

**Недистрибутивность**  $x + y \cdot z \neq (x + y)(x + z)$

#### 5. Приоритет операций

1. Отрицание.
2. Умножение, конъюнкция
3. Дизъюнкция, исключаяющее "или"
4. Импликация, эквивалентность

#### 6. Правила де Моргана

- $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
- $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

#### 7. Другие свойства

- $\overline{\bar{x}} = x$
- $0x = 0$
- $1x = x$
- $0 \vee x = x$
- $1 \vee x = 1$
- $x \implies y = \bar{x} \vee y$

## Дизъюнктивная нормальная форма

Нормальная форма - один из вариантов записи логического выражения.

$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee z \vee 0$$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$  - Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) выражения.

### Определение:

Выражение имеет ДНФ, если оно является дизъюнкцией нескольких конъюнктов.

Конъюнкт - это конъюнкция литералов.

Литерал - переменная или отрицание переменной.

Пример:

•  $xy \vee z$        $xy, z$  - Конъюнкты       $x, y, z$  - Литералы

•  $x\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}z$       3 конъюнкта, 3 литерала

•  $x \vee \bar{y} \vee z$       3 конъюнкта по 1 литералу

•  $\bar{x}$       1 конъюнкт, 1 литерал

**Не ДНФ:**  $x \vee 1$ ,       $(x \vee y) \cdot z$ ,       $x \vee y \vee z \vee x \implies xy$