

Лекция по математической логике и теории алгоритмов

30 октября 2019

Исчисление предикатов.

Исчисление высказываний: есть функция логическая.

Переменные: в функциях - пропорциональные 0 или 1. Легко перебирать все возможные значения переменных.

Исчисление предикатов: переменные - предметные принимают значения = элементы непустого множества, т.е. можно формулировать утверждения про элементы какого-то множества (числа, слова, студенты ...).

Итак, чтобы понять формулировать утверждения, заводим множество.

$M \neq \emptyset$

Определение: Предикат - это функция

$P: M^k \rightarrow \beta$

$k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$

$\beta = \{F, T\}$, где F - ложь, а T - истина.

Примеры:

$M = \mathbb{Z}$

$P_1(x) = x \geq 0$, что x положительно

$P_2(x) = x^2 + 1 \geq 7$

$P_3(x) = x$ содержит цифру в 10-й записи

$P_3(238) = F$

$P_3(-571) = T$

$P_4(x, y) = x > y$

$P_5(x, y) = x^2 + y^2 = 25$

$P_5(7, 8) = F$

$P_5(3, 4) = T$

$P_5(0, 5) = T$

$P_6 = F, P_7 = T$, $k=0$, нет переменных.

$P_8(x, y) = x$ посещал лекции чаще чем y в этом семестре

$M =$ студенты этого потока.

Определение: Функции - $f: M^k \rightarrow M, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$. Функции превращают один или несколько элементов множества в элемент множества.

Примеры:

$M = 7$

$$f_1(x, y) = x + y$$

$$f_2(x, y) = x^2 + y - 1$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } x \text{ - четный} \\ 42, & \text{если } x \text{ - нечетный} \end{cases}$$

$$f_3(2, 5) = 5$$

$$f_3(7, 8) = 42$$

$$f_4(x) = x^2$$

$$f_5(x) = x \text{ без цифр 1 в 10-й записи.}$$

$$f_5(42) = 42$$

$$f_5(57121) = 572$$

$$f_5(111) = 0$$

$$f_6 = 7 \leftarrow \text{константа } k=0$$

$$f_7(x, y) = \text{третий студент (кроме } x, y).$$

$$M = \text{Ниф Ниф, Наф Наф, Нуф Нуф}$$

Обязательно доопределить

$$f_7(x, y) = x \text{ если } x=y.$$

Замечания:

1)Предикаты - заглавные буквы A,B,C,P,Q,R,S

Функции - строчные буквы f,g,h...

Константы - начало алфавита a,b,c...

2)Некоторые функции и предикаты можно записать привычно в инфиксной форме:

$$x > y \text{ вместо } P(x, y) > (x, y)$$

$$x + y \text{ вместо } f(x, y)$$

$$x^y \text{ вместо } g(x, y), \text{ где } g - \text{ возведение в степень.}$$

Определение: формула исчисления предикатов содержит: предикатные символы, функциональные символы, предметные переменные, кванторы.

Подопределения.

Термы: переменная функция символ (, ,).

Пример: Пусть x, y, z - переменные. Пусть f, g, a - функциональные символы.

Замечание:

$$x \text{ f(f(x))}$$

$$f(x) \text{ f(g(x,y))}$$

$$f(g(x, g(a, f(y))))$$

Формула исчисления предикатов - это

- предикатный символ (терм, терм, терм) (все переменные внутри термов свободны)

- любое x . Функция исч. предикатов и свободной переменной x . (здесь переменная x перестает быть свободной и становится связанной).

- \neg ФИП, ФиП \implies ФИП.

- существует x . -///-

ФИП - это выражение предиката через другие предикаты и функции.

При этом смысл функций и предикатов не важен, но если смысл будет задан, то получится конкретный предикат.

Примеры:

1. $P(x,y)$, где x и y - перм (перемен.); P - предикатный символ.

Интерпретация:

Задать M и символ P .

1) $M = z$

$P(x,y) : x > y$

2) $M =$ студентов $P(x,y) : x$ чаще ходит.

Обе переменные x,y - свободны. Это значит, что им можно назначить конкретное значение, и тогда результат вычисления истина или ложь.

$x = 5, y = 7 : P(x,y) = F$

$x = 4, y = 2 : P(x,y) = T$

2. $P(x,a)$, где x - перем (терм); y - константа(терм) (функция).

Интерпретация: $P = ?$, $a = ?$, $m = ?$

1) $m = z, P(x,y) : x > y$ $a = z$

одна свободная переменная x

$x = 8 : T$

$x = y : F$

3. $P(x) \vee Q(x)$

Интерпретация:

$P = ?$

$a = ?$

1) $m = z, P(x) = x$ - четн.; $Q(x) = x$ - нечет.

свободная переменная: x

$x = 1: F \vee T = T$

$x = 10: T \vee F = T$

$x =$ неважно: $\dots \vee \dots T$

4. Для любого x $P(x)$

Интерпретация: $M = ?$ $P = ?$

Свободны: y (x - связан)

1) $M = z, P(x,y) : x \geq y$

$y = 0.$

Для любого $P(x,0) \iff$ для любого $x \geq 0$

Чтобы вычислить любое x $P(x)$ надо проверить, что $P(x)$ всегда T при всех $x \in M$

2) $M = N$ $P(x,y) : x \geq y$

Любое x $P(x,y)$

при $y = 1 \implies T$

при $y = 2 \implies T$

Замечание: чтобы вычислить формулы исчисления предметов надо:

- интерпретация, т.е. $M = ?$ задать множество

$P, Q = ?$

$f, q = ?$

задать смысл предикатов и функций символов - задать значения свободных переменных без этого мы получаем не F, T , а предикат. То есть для любого x $P(x,y) = Q(y)$ - предикат от y .

5. Существует x (любое y $P(x,y)$)

свободные переменные: нет

интерпретации:

1) $M = \mathbb{Z}$ $P(x,y) : x \leq y$

любое y $P(x,y) = Q(y)$ - обозначим

или $Q(x) = \text{любое } y, x \leq y$

$Q(0) = \text{любое } y, 0 \leq y = F$

$Q(-1) = \text{любое } y, -1 \leq y = F$

$Q(\dots) = \text{любое } y, \dots \leq y = F$

То есть $Q(x) = F$ независимы от x

Существует x любое y $P(x,y) = \text{существует } x$ (можно преобразовать $x \in m$ внутри T), $F = F$.

2) другая интерпретация

$M = \mathbb{N}$ $p(x,y) : x \leq y$

Существует x любой y $P(x,y) = \text{существует } x = T$ при $x = 1$.

$Q(1) = \text{любое } y, 1 \leq y = F$

$Q(2) = \text{любое } y, 2 \leq y = F$

$Q(\dots) = \text{любое } y, \dots \leq y = F$

Ещё примеры. Начнем с интерпретации.

$M = \mathbb{N}$

$P(x,y) : x = y$

$F(x,y) : x + y$

и ещё несколько стандартных функций и предметов

$x > y = \text{существует } K : x = y + k = (x + (y * k))$

$x : y = \text{существует } k : x = y + k$

x - степень числа 2

$x = 1, 2, 4, 8, 16, \dots$