Лекция по математической логике и теории алгоритмов

4 сентября 2019

Исчисление высказываний

Логическая формула: выражение со значениями (0,1)
переменными (x,y, ...)
и операциями (•, ∨, ↔, ...)

Арифметические выражения.

Пример: ((z+x)•y-10)/z

Логические выражения.

Пример: (1+¬x)→(x*y ↔ ¬y ¬z)

где 1 - значение; x,y - переменные; ↔ - операция.

Значения: 0 - ложь(F), 1 - истина(T).

Операции. Унарная операция.

¬ - отрицание.

¬1 = 0.

x	¬x
0	1
1	0

Бинарные операции(2*2*2*2=16 - всего операций.)

x	y	x ∨ y	x ∧ y	x ⊕ y	x → y	x ≡ y	x | y	x ↓ y
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Пример импликации:

1) 2*2=5 ⟹ сегодня суббота

Верно

2) ¬ (1 ⟹ 0) *1 = ¬ 0 *1= 1*1=1

Свойства операций:

∧,∨,↔,+ - коньюктивны

x*y=y*x - умножение

$x \lor y = y \lor x$

$x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$ - равенство

$x + y = y + x$ - Сумма в Z2

Универсальный способ проверки равенства двух логических выражений, это сравнить значения выражений при всех возможных значениях переменных.

x	y	$x \lor y$	$y \lor x$
0	0	$0 \lor 0 = 0$	$0 \lor 0 = 0$
0	1	$0 \lor 1 = 1$	$1 \lor 0 = 1$
1	0	1	1
1	1	1	1

Третий и четвертый столбцы совпадают.

$x \implies y$ - не коммутативно

x	y	$x \implies y$	$y \implies x$
0	0	$0 \implies 0 = 1$	$0 \implies 0 = 1$
0	1	$0 \implies 1 = 1$	$1 \implies 0 = 0$

Третий и четвертый столбцы не совпадают.

Ассоциативность:

$(x \lor y) \lor z = x \lor (y \lor z)$

$(x * y)*z = x*(y*z)$

x	y	z	$x \lor y$	$(x \lor y) \lor z$	$y \lor z$	$x \lor (y \lor z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Пятый и седьмой столбцы совпадают.

$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$

$(x \Longrightarrow y) \Longrightarrow z \neq x \Longrightarrow (y \Longrightarrow z)$, т.к.

x	y	z	$(x \Longrightarrow y) \Longrightarrow z$	$x \Longrightarrow (y \Longrightarrow z)$
0	0	0	$(0 \Longrightarrow 0) \Longrightarrow 0=0$	$0 \Longrightarrow (0 \Longrightarrow 0)=1$

Запись логических выражений.

У ассоциативных операций () можно не иметь.

x+y+z - нормально.

Пример: $x \to y \to z$

Если скобок нет, имеется в виду $x \to (y \to z)$.

Приоритет операций $x \vee y * z \to \neg(x*y)$,

1)$\neg$

2) $\bullet$ $\wedge$

3) $\vee +$

4) $\leftrightarrow$ и $\to$

Правило Дэ Моргана

$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$

$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

Проверка:

x	y	$\neg(x \wedge y)$	$\neg x \vee \neg y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Дистрибутивность.

$x \bullet (y \vee z) = x \bullet y \vee x \bullet z$

$x \bullet (y+z) = x \bullet y + x \bullet z$

$x \vee (y \bullet z) = (x \vee y) \bullet (x \vee z)$ - двойственная

$x + y \bullet z \neq (x+y)(x+z)$ неверно при x=1, y=1, z=0.

Ещё набор свойств:

$\neg\neg x = x$

$x \to y = \neg x \vee y$ - см. таблицу истинности.

$x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$ - см. Мат. Анализ.

Дизъюктивно-нормальная форма.

Нормальная форма - один из вариантов записи логических выражений.

$x \bullet y \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = x \bullet y \vee z \vee 0 = x \bullet y + z + x \bullet y \bullet z$

Здесь $x \bullet y \vee z$ - дизъюктивно-нормальная форма(ДНФ)

Выражение имеет ДНФ, если оно является дизъюнкцией нескольких конъюктов.

Конъюнкт - это конъюнкция литералов.

Литерал - переменная или отрицание переменной.

Пример: $x \bullet y \vee z$

где z - литерал; x и y - конъюнкты.

Ещё ДНФ: $x \bullet \neg y \bullet z \vee x \bullet \neg y \bullet \neg z \vee \neg y \bullet z$ - 3 конъюнкта.

$x \bullet \neg y \bullet z$ - 1 конъюнкт.

$\neg x \vee \neg y \vee z$ - 3 конъюнкта по 1 литералу.
$\neg x$ - ДНФ, 1 конъюнкт из 1 литерала.
$x \bullet \neg y \bullet z \vee \neg y \bullet z \vee x \vee \neg y \bullet \neg z$
Не ДНФ:
$x \vee 1$,
$x \vee y \vee z \vee x \rightarrow y$,
$x \vee y \bullet z$,
$x + y$.