Лекция 8

1 Исчисление предикатов

Исчисление высказываний есть функция логическая. Переменные в функциях пропозициональные - 0 или 1, легко перебирать все возможные значения переменных.
Исчисления предикатов : переменные - предметные , принимают значения = элементы ненулевого множества, т.е. можно формулировать утверждения про элементы какого-то множества (числа, студенты, слова...)
Итак, чтобы понять как формулировать утверждения, заводим множество M $\neq 0$
Определение: Предикат - это функция $P : M^K \longrightarrow B$ n$\geq 0; k \in Z$
B=0 , 1 (ложь и истина)
Примеры :
M = Z
$P_1(x) = x \geq 0$ (что x положительно)
$P_2(x) = x^2 + 1 \geq 7$
$P_3(x) = x$ содержит цифру 1 в десятичной записи
$P_3(238) = 0, P_3(-571) = 1$
$P_4(x, y) = x > y$
$P_5(x, y) = x^2 + y^2 = 25(P_5(7, 8) = 0, P_5(3, 4) = 1, P_5(0, 5) = 1)$
$P_6(k = 0)$, нет переменных) = 0
$P_7 = 1$
$P_8(x, y) = x$ посещал лекции чаще чем y в этом семестре
M = студенты этого потока
Определение: Функции - f: $M^k \longrightarrow M(k \geq 0, k \in Z)$
Функции превращают один или несколько элементов множества в элемент множества
Пример : M = Z
$f_1(x, y) = x + y$
$f_2(x, y) = x^2 + y - 1$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} \text{y, если x - четное} \\ \text{42 , если x -нечетное} \end{cases}$$

$f_3(2,5) = 5; f_3(7,8) = 42$
$f_4(x) = x^2$
$f_5(x) =$ x без цифр 1 в десятичной записи
$f_5(42) = 42; f_5(57121) = 572; f_5(111) = 0$
$f_6 = 7 =$ константа (k = 0)
$f_7(x,y) = x$ если x = y
M = Ниф- ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф = третий студент (кроме x,y)
Замечание :
Предикаты - заглавные буквы P,Q,R,S,A,B,C
Функции - строчные буквы f,g,h
константы - начало алфавита a,b,c...
2) Некоторые функции и предикаты можно записать привычно в инфиксной форме
x>y вместо P(x,y) > (x,y)
x+y вместо f(x,y) + (x,y)
x^y вместо g(x,y) , где g возведение в степень
Определение: Формула исчисления предикатов.
Содержит : предикатные символы, функциональные символы, предметные переменные, кванторы
Подопределение : Терм: переменная функции , символ ($\underbrace{\;,\;,\;}_{\text{термы}}$)
Пример : пусть x,y,z - переменные, пусть $\underbrace{\underbrace{f}_{1}, \underbrace{g}_{2}, \underbrace{a}_{0}}_{\text{кол-во аргументов}}$ - функции
Остальные символы
x ; f(f(x))
f(x) ; f(g(x,y))
f(g(x,g(a,f(y))))
Формула исчисления предикатов - это
$\boxed{1}$ - предикатный символ от нескольких термов (терм, терм, терм)
$\boxed{2}$ - $\forall x$ формула исчисления предикатов со свободной перменнной x
$\boxed{3}$ - $\exists x$ формула исчисления предикатов со свободной переменной x
(1) - все переменные внутри термов свободны
(2,3) - здесь переменная x перестает быть свободной, становится связанной
- функция исчисления предикатов ($\widetilde{\text{ФИП}}$) , ФИП $\longrightarrow$ ФИП
Замечание : ФИП - это выражение предиката через другие предикаты и

функции. При этом смысл предикатов не важен.
Но если смысл будет задан, то получится конкретный предикат
Примеры : 1) $\underbrace{P}_{\text{предикатный символ}} (\underbrace{x}_{\text{терм(переменная)}} , \underbrace{y}_{\text{терм(переменная)}})$ (P(x,y))
Интерпретация :
Задать M и смысл P
1)M = Z P(x,y) : x > y
2)M = студенты P(x,y) : x чаще ходит
Обе переменные x,y - свободны
Это значит, что им можно назначить какое-то значение, и тогда результат вычисления формулы истина или ложь
x = 5 , y = 7 P(x,y) = 0
x = 4 , y = 2 P(x,y) = 1
2. $\underbrace{P}_{\text{предикатный символ}} (\underbrace{x}_{\text{терм(переменная)}} , \underbrace{a}_{\text{терм(константа)}})$ - P(x,a)
Интерпретация : P - ? , M - ? , a - ?
1)M = Z , P(x,y) : x>y , a = 7
Одна свободная переменная x
x = 8 : 1
x = 6 : 0
3. P(x) $\vee$ Q(x)
Интерпретация P = ?, Q = ? , M = ?
M = Z ; P(x) = x - четное ; Q(x) = x - нечётное
свободные переменные : x
x = 1 : 0 $\vee$ 1 = 1
x = 1 : 1 $\vee$ 0 = 1
x = неважно : ... = 1
4.$\forall x$ P(x,y)
Интерпретация :
M = ? P = ?
свободны : y (x - связан)
вычисляем
1) M = Z , P(x,y) = x $\geq$ y
y = 0 $\forall$ x P(x,0) $\leftrightarrow$ $\forall$ x $x \geq 0$
Чтобы вычислить $\forall x P(x)$ надо проверить , что P(x) всегда 1 при всех $x \in M$.
Результат 0
2)M = N ; P(x,y) : $x \geq y$
$\forall x$ P(x,y)
при y = 1 $\rightarrow$ 1
при y = 2 $\rightarrow$ 0
Замечание : Чтобы вычислить значение формулы исчисления предиката на-

до
-Интерпретация, то есть M = ? P,Q = ? f,g = ?
-Задать смысл предикатов и функциональных символов
-Задать значения свободных переменных
Из этого мы получаем не 0, 1, а предикат, т.е. ∀ x P(x,y) = $\underbrace{Q(y)}_{\text{предикат от y}}$

5. $\exists x \forall y P(x, y)$
Свободные переменные : нет
Интерпретация :
1)M = Z ; P(x,y) : x ≤ y
$\forall y$ P(x,y) = Q(x)
или Q(x) $\forall y x \leq y$
Q(0) $\forall y 0 \leq y$ = ложь (0)
Q(-1) $\forall y - 1 \leq y$ = ложь (0)
Q(...) $\forall y ... \leq y$ = ложь (0)
т.е. Q(x) = 0 независимо от x
$\exists x \underbrace{\forall y P(x, y)}_{Q(x)} = \underbrace{\forall x}_{\text{можно подобрать x}\in M\text{:внутри 1}} \quad 0$
2)Другая интерпретация
M = N ; P(x,y) : x ≤ y
Q(1) : $\forall y 1 \leq y = T$
Q(2) : $\forall y 2 \leq y = F$
Q(...) = F

$$\exists x \underbrace{\forall y P(x, y)}_{Q(x)} = \begin{cases} x = 1 : T \\ x = \text{иначе: } F \end{cases}$$

= T (при x = 1)
Еще примеры : начнем с интерпретации
M = N
P(x,y) : x = y
f(x,y) : x+y
и еще несколько стандартных
x > y $\exists k$ x = y + k
$x \vdots y = \exists k$ x =y*k