

Лекция 2

1 Напоминание

Формула имеет ДНФ если она дизъюнктивно конъюнктивна

Пример : $x\tilde{y} \vee \tilde{x}\tilde{z} \vee x\tilde{y}z$ (3 конъюнкта - $x\tilde{y}, \tilde{x}\tilde{z}, x\tilde{y}z$)

Замечание : По ДНФ легко считать значение выражения.

Выражение истинно \Leftrightarrow есть хотя бы один конъюнкт, который истинен.

Конъюнкт истинен \Leftrightarrow все литералы истинны

Пример : конъюнкт $x\tilde{y}z$ истинен $\Leftrightarrow x=1 ; y=0 ; z=1$

Замечание : Задача поиска значения переменных, при которых формула в ДНФ ложно, - это вычислительно сложная задача.(т.е. Неизвестна эффективность алгоритмов, которые в общем случае быстрее полного перебора значений переменных)

2 Приведение к ДНФ

Задача : Дана логическая формула, нужно получить эквивалентную в ДНФ.

1.Метод Алгебраических Преобразований.

- см. все преобразования, которые были

-ДНФ всех логических связок

$x \vee y$ - ДНФ

$x \vee y$ - ДНФ

$x \Rightarrow y = \tilde{x} \vee y$ (2 конъюнкта по 1 литералу)

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\tilde{x} \vee y)(\tilde{y} \vee x) = \tilde{x}\tilde{y} \vee \tilde{x}x \vee \tilde{y}y \vee yx = \tilde{x}\tilde{y} \vee xy$

Запомним : $x \Leftrightarrow y = \tilde{x}\tilde{y} \vee xy$

Осталось только $x + y$

$x + y = \widetilde{\tilde{x} \Leftrightarrow y} =$

см. Таблицу Истинности (далее - ТИ) $= (\tilde{x} \vee y)(\tilde{y} \vee x) = \widetilde{\tilde{x} \vee y} \vee \widetilde{\tilde{y} \vee x} =$

$x\tilde{y} \vee y\tilde{x}$

x	y	x+y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Запомним : $x + y = x\tilde{y} \vee y\tilde{x}$

Пример преобразований:

$(x \Leftrightarrow yz) \Rightarrow x = x \Leftrightarrow yz \vee x = (x+yz) \vee x = (x\tilde{y}\tilde{z} \vee \tilde{x}yz) \vee x = x(\tilde{y} \vee \tilde{z}) \vee \tilde{x}yz \vee x = x\tilde{y} \vee x\tilde{z} \vee \tilde{x}yz \vee x$ - ДНФ исходной формулы

2.Получение ДНФ по таблице истинности

Дана ТИ (n - переменных) :

$x_1, x_2 \dots x_n$	логическая формула
0 0 0	0
...	1
...	0
...	0
...	1
1 1 1	0

Рассмотрим строки с 1 в столбце значений, это строки

$x_1^{(1)} x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)} 1$

$x_1^{(2)} x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)} 1$

$\dots x_1^{(k)} x_2^{(k)} \dots x_n^{(k)} 1$

Таких строк : k штук

Составим ДНФ следующим образом :

k конъюнктов , конъюнкт имеет вид :

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n$, отрицание если $x_1^{(i)} = 0, x_2^{(i)} = 0, \dots x_n^{(i)} = 0$

Пример :

x y z	$(x \leftrightarrow yz)x$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	$1(\tilde{x}yz)$
1 0 0	$1(x\tilde{y}\tilde{z})$
1 0 1	$1(x\tilde{y}z)$
1 1 0	$1(xyz\tilde{z})$
1 1 1	$1(xyz)$

Из этого следует такая ДНФ :

$$\tilde{x}yz \vee x\tilde{y}\tilde{z} \vee x\tilde{y}z \vee xyz \vee xy\tilde{z}$$

Формула ДНФ, построенная этим методом эквивалентна исходной формуле.

Доказательство : проверим, что её ТИ такая же для строки i

$$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$$

равен 1 только если

$$x_1 = x_1^{(i)}$$

$$x_2 = x_2^{(i)}$$

...

$$x_n = x_n^{(i)}$$

Его таблица истинности :

$x_1 \dots x_n$	$x_1^{(?)}, x_2^{(?)}, \dots, x_n^{(?)}$
	0
	0
$x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}$	1
	0
	0
	0

Дизъюнкция всех конъюнктов даёт ТИ, совпадающую с исходной

Замечание : может быть много ДНФ

$$\text{Пример : } \tilde{x}yz \vee x\tilde{y}\tilde{z} \vee x\tilde{y}z \vee xy\tilde{z} \vee xyz = x\tilde{y} \vee x\tilde{z} \vee \tilde{x}yz \vee x$$

Можно ли найти самую короткую?

(Считаем литералы и дизъюнкции, 19 против 11).

Поиск самой короткой вычислительно сложная задача. Если бы мы умели её искать эффективно, мы бы могли эффективно решить задачу проверки на взаимность поля :

$$xyz \vee x\tilde{y}z \vee xy\tilde{z} = 1 \text{ (1) , } = \text{ иногда 0 иногда 1 (2) , } = \text{ можно вычислить (3)}$$

min ДНФ $x \vee \tilde{x}, y \vee \tilde{y}$ соответствует 1

Другой ответ соответствует 2 (0 или 1).

Поэтому поиск min ДНФ - Перебор ДНФ.

Как его оптимизировать?

$$\text{В примере } x \vee x\tilde{y} \vee x\tilde{z} \vee \tilde{x}yz = x(1 \vee \tilde{y} \vee \tilde{z}) \vee \tilde{x}yz \text{ (подчеркнутый текст равен 1)} \\ = x \vee \tilde{x}yz \text{ (Вспомним } a \vee bc = (a \vee b)(a \vee c)) = \underline{(x \vee \tilde{x})} (x \vee yz) \text{ (Подчеркнутое равно 1)} = x \vee yz$$

Получили 4 символа

3 Идеи упрощения ДНФ

1) $\bar{x} \square \vee x \square = \square$

Если два конъюнкта отличаются одной переменной

2) $xy \square \vee x\bar{y} \square \vee \bar{x}y \square \vee \bar{x}\bar{y} \square$ (Два схлопывания)

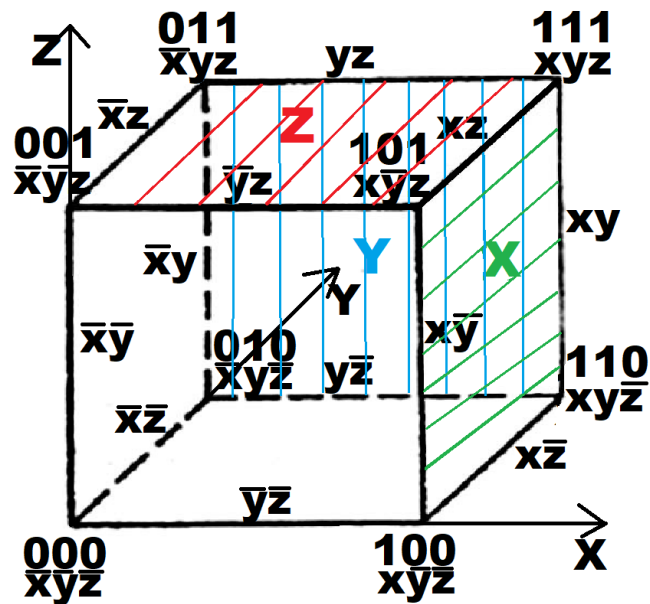
3) Повторение конъюнктов

$\bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z$

Лучше $\bar{x}yz \vee \underline{xyz} \vee x\bar{y}z = yz \vee xz$ (Подчёркнутое - повтор)

Это min ДНФ.

Метод поиска min ДНФ - у нас : метод n-мерного кубика.



Каждая вершина - конъюнкт оси xyz, каждая вершина - координаты из 0

и 1

Как выглядит схлопывание на кубике? $\bar{x}yz \vee xyz = yz$ (ребро)

Ребро - конъюнкт из двух переменных.

yz - ребро ($y=1, z=1$) $\bar{y}\bar{z}$ - это ребро ($x=0, z=0$)

А что значит $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xyz = z$?

Это 4 вершины = грань. Грань - конъюнкт из 1 литерала.

Грань z - это грань $z = 1$

Пример :

1) $\bar{x}yz \vee xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z =$

2) $= x\bar{y} \vee xz \vee \bar{x}yz \vee x =$

3) $= x \vee \bar{x}yz =$

4) $= x \vee yz$

