Задача о счастливых билетах

1 Постановка задачи

На лекции вы наверняка разбирали задачу о счастливых билетах. Здесь не будет повторения лекции, а будет разобрана аналогичная задача с другим определением того, что такое счастье для билета.

Предположим, что билеты состоят из пяти цифр, и счастливыми считаются те, у которых сумма первых трех цифр на 5 больше суммы последних двух цифр. Для номеров билетов нет запрета на то, чтобы ноль был первой цифрой. Например, счастливыми будут билеты:

номер	суммы цифр	$+5$
`12512`:	$1+2+5=1+2$	$+5$
`23927`:	$2+3+9=2+7$	$+5$
`12200`:	$1+2+2=0+0$	$+5$

Вопрос. Сколько всего существует счастливых билетов? Эту задача и будет далее решена.

Всего билетов есть 10^5, значит, ответ получится не больше этого числа.

Эту задачу удобно превратить в другую задачу с более естественным условием. Вместо поиска счастливых билетов удобней искать билеты с фиксированной суммой цифр. Следующий раздел демонстрирует, как одна задача преобразуется в другую.

Решение новой задачи о билетах с фиксированной суммой цифр можно проводить двумя способами. Вам потребуется воспользоваться обоими способами, а потом убедиться, что они привели вас к одинаковым ответам.

2 Преобразование задачи в задачу о сумме цифр

Сначала научимся дополнять цифры до девяти:

цифра	$\leftrightarrow$	дополнение
0	$\leftrightarrow$	9
1	$\leftrightarrow$	8
2	$\leftrightarrow$	7
3	$\leftrightarrow$	6
4	$\leftrightarrow$	5
5	$\leftrightarrow$	4
6	$\leftrightarrow$	3
7	$\leftrightarrow$	2
8	$\leftrightarrow$	1
9	$\leftrightarrow$	0
d	$\leftrightarrow$	$9-d$

Сопоставим каждому билету, неважно, счастливому или нет, другой билет по следующему правилу: первые три цифры не меняются, четвертая и пятая цифры дополняются до 9. Например, билет `12512` превращается в билет `12587`.

В общем виде, билет $\overline{abcde}$ превращается в $\overline{abc(9-d)(9-e)}$. Это сопоставление является взаимно однозначным сопоставлением множества билетов в себя, это значит, что каждому билету однозначно сопоставлен какой-то другой билет.

Рассмотрим сумму цифр сопоставленного билета: $a+b+c+9-d+9-e = 18+a+b+c-(d+e)$. Для счастливых, и только для счастливых билетов последнее выражение равно $18+5=23$.

Другими словами, каждому счастливому билету сопоставлен билет с суммой цифр 23.

Так как сопоставление взаимно однозначно, можно сделать вывод, что количество счастливых билетов равно количеству билетов с суммой цифр 23. В следующих разделах мы будем считать количество билетов с этой суммой и забудем про счастливые билеты совсем.

Заметим, что сопоставление можно было провести по-другому: билету $\overline{abcde}$ можно сопоставить $\overline{(9-a)(9-b)(9-c)de}$. Т.е. дополнить до 9 первые цифры, а не последние. В это случае сумма цифр полученного билета была бы равна $9-a+9-b+9-c+d+e = 27-(a+b+c)+(d+e)$. И для счастливых билетов это равно $27-5=22$. Итого, количество счастливых билетов равно количеству билетов с суммой цифр 22. Перед этим мы получали другое число 23, но это не проблема. Получается, что билетов с суммой цифр 22 столько же, сколько билетов с суммой 23.

3 Символьные вычисления

Рассмотрим многочлен

$$(x^0+x^1+x^2+x^3+\cdots+x^9)^5 = (1+x+x^2+x^3+\cdots+x^9)^5.$$

Здесь в скобках в качестве степеней написаны все возможные цифры номера от нуля до 9. Цифры именно такие, потому что в задаче подразумевается десятичная система счисления. Иначе в задаче явно было бы сказано про другую систему счисления. Указанное в степени число 5 — это количество цифр в номере.

Если немного подумать, оказывается, что после раскрытия скобок в этом многочлене, коэффициент при x^{22} и будет ответом в задаче. Вручную раскрыть скобки слишком сложно, лучше воспользоваться системой численных вычислений. Например, такие выичсления делает сайт `wolframalpha.com`.

Введите в запросе команду

```
expand (x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9)^5
```

В ней слово expand означает просьбу раскрыть скобки. В качестве ответа будет приведен многочлен, в котором можно увидеть коэффициенты при степенях 22 и 23: $\dots + 6000x^22 + 6000x^23$. Как и предполагалось, ответы для 22 и 23 должны были совпасть.

Итого, 6000 — ответ в исходной задаче. Многочлен показал, что есть 6000 номеров с суммой цифр 22 (или 23), а мы знаем, что таких номеров столько же, сколько счастливых номеров.

4 Вычисление по формуле включений-исключений

Задача вычисления количества номеров с заданной суммой цифр очень похожа на известную нам задачу: вычисление количества разложений числа на слагаемые:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, x_i \geq 0.$$

Ответ в этой задаче будет C^4_{22+4}. Численно это равно 14950, что сильно больше правильного ответа 6000. Так получается, потому что не учитывается еще одно условие что все $x_i < 10$.

Из ответа C^4_{22+4} необходимо вычесть все неправильные номера, имеющие цифру хотя бы 10.

Разобъем неправильные номера на пять множеств: A_1 — это те номера, у которых первая цифра хотя бы 10. A_2 — это те номера, у которых вторая цифра хотя бы 10 и т.д. Все неправильных номера — это объединение множеств $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$. Для окончания решения необходимо найти количество неправильных номеров, т.е. мощность указанного множества. Для этого подходит формула включений-исключений:

$$\begin{gathered}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = \\
|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| - \\
|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_4 \cap A_5| + \\
|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - \ldots - |A_3 \cap A_4 \cap A_5| - \\
\ldots
\end{gathered}$$

Разберем формулу постепенно. В первой строке написана мощность множества неправильных номеров, это ровно то, что нужно вычислить.

Во второй строке написана сумма мощностей множеств A_i, это количество номеров, у которых i-ая цифра хотя бы 10. Посчитаем, например, $|A_1|$, это количество номеров, у которых первая цифра хотя бы 10, т.е. необходимо решить задачу:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, x_1 \geq 10, x_i \geq 0.$$

Вычитая 10 из обеих частей, получаем другую задачу:

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, y_1 \geq 0, x_i \geq 0.$$

Здесь ответ C_{12+4}^4. Во второй строке формулы включений-исключений складывается пять одинаковых слагаемых, поэтому там написано $5C_{12+4}^4$.

Переходим к третьей строчке формулы. В ней складываются все попарные пересечения множеств. Пересечение, например, A_1 и A_2 это все номера, у которых неправильная и первая, и вторая цифры. Т.е. и первая, и вторая цифры хотя бы 10. Чтобы найти количество таких номеров, надо решить задачу:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 22, x_1 \geq 10, x_2 \geq 10, x_i \geq 0.$$

Вычитаем 20 из обеих частей, получаем задачу

$$y_1 + y_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, x_i \geq 0.$$

В ней ответ C_{2+4}^4. Всего слагаемых в третьей строчке формулы — C_5^2, потому что необходимо выбрать все пары множеств из пяти множеств. Соответственно, в третьей строчке формулы написано $C_5^2 C_{2+4}^4$.

В четвертой строчке формулы перебираются пересечения множеств по три. В пересечении трех множеств находятся номера, у которых есть три цифры, каждая из которых хотя бы 10. Но в таком случае сумма цифр будет хотя бы 30, и она не может быть равна 22. Поэтому в строках формулы включений-исключений, начиная с четвертой строки написаны нули.

Итого, формула включений-исключений дает результат, что неправильных номеров $5C_{12+4}^4 - C_5^2 C_{2+4}^4$. Для получения окончательного ответа в задаче нужно из количества всех номеров вычесть количество неправильных: $C_{22+4}^4 - 5C_{12+4}^4 + C_5^2 C_{2+4}^4$.

Полученное выражение можно вычислить численно, и результат будет как раз 6000. Это гарантирует, что ответ в задаче вычислен правильно, т.к. два совершенно разных метода дали один и тот же результат.

Последние замечания. Было показано, что задачу можно решать для суммы цифр 23 и для суммы цифр 22. В обоих случаях ответ получился бы одинаковый, 6000. В своей задаче вы можете тоже определить, для каких двух сумм ее надо решать, и решать после этого для меньшей суммы. Для меньшей суммы чаще получается проще.

При сдаче задачи обязательно решите ее двумя предложенными способами. Тем более, что первый очень простой, в нем все вычисления за вас делаются автоматически.