Математическая логика
и
Теория алгоритмов

Посов И.А.

Весна 2022 г.

Запись конспекта: Спиридонов А.

Содержание

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

Определение $\wp = \{0, 1\}$
0 – ложь, false
1 – истина, true
$\wp$ — множество логических значений

Определение Логическая функция (от n переменных) $f : \wp^n \to \wp$
Замечание Часто логические функции вводят перечислением возможных аргументов и значений для них

Пример

x y	$f(x, y)$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Ту же функцию можно задать формулой $f(x, y) = max\ (x, y)$

Утверждение
Функций от n переменных может быть $2^{(2^n)} = 2^{2^n}$

$x_1, x_2 \dots x_n$		$f(x_1, x_2 \dots x_n)$
0 0 0 ... 0	2^n	Для каждой строчки 0 или 1
....	разных	(2 варианта)
....	наборов	итого 2^n вариантов
1 1 1 ...1	аргументов	

Следствие
• $n = 1 : 2^2 = 4$ функции $f(x)$

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

$f_1(x)$ = тождественный 0
$f_2(x) = x$
$f_3(x)$– отрицание.
Обозначение: $\neg x, \bar{x}$
Обозначение в языках программирования: $!x, not\ x$
Примеры: $\neg 1 = 0, \neg 0 = 1, \neg\neg 0 = 0$
$f_4(x)$ = тождественная 1

• $n = 2 : 2^4 = 16$ функций $f(x, y)$

$x\ y$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_1(x, y) =$ тождественный 0

$f_2(x, y)-$ логическое И, конъюнкция
Математическая запись: $f_2(x, y) = xy$
Обозначение: $x \cap y, x \wedge y, x * y, xy$
Обозначение в языках программирования: $x\&y$

$f_3(x, y)$ Математическая запись: $f_3(x, y) : x > y$
Обозначение: $x \rhd y$ (запрет по y) $= \overline{x \Rightarrow y}$

$f_4(x, y) = x$

$f_5(x, y)$ Математическая запись: $f_5(x, y) : x < y$
Обозначение: $x \lhd y$ (запрет по x) $= \overline{y \Rightarrow x}$

$f_6(x, y) = y$

$f_7(x, y)-$ исключающее или (ровно один элемент истина)
Математическая запись: $f_t(x, y) : x + y \ mod\ 2$
Обозначение: $x + y, x \oplus y$
Обозначение в языках программирования: $x\hat{}y, x\ xor\ y$

$f_8(x, y)-$ логическое ИЛИ, дизъюнкция (если истина хотя бы одна)
Математическая запись: $f_8(x, y) = max\ (x, y)$
Обозначение: $x \cup y, x \vee y$, редко $x \mid y$

$f_9(x, y)-$ стрелка Пирса
Обозначение: $x \downarrow y = \overline{x \cup y}$

$f_{10}(x, y)-$ эквивалентность (оба истина или оба ложь)
Математическая запись: $f_{10}(x, y) : x = y$
Обозначение: $x \Leftrightarrow y, x \leftrightarrow y, x \equiv y$
Обозначение в языках программирования: $x == y$

$f_{11}(x, y) = \bar{y}$

$f_{12}(x, y)$– импликация в обратную сторону
Обозначение: $x \Leftarrow y = y \Rightarrow x$

$f_{13}(x, y) = \bar{x}$

$f_{14}(x, y)$– импликация (следование)
Математическая запись: $f_{14}(x, y) : x \leq y$
Обозначение: $x \Rightarrow y, x \rightarrow y$

$\star$ импликация
– истина следует из чего угодно ($f_{14}(x, 1) = 1$)
"Леших не существует"$\Rightarrow$ "Русалок не существует"($1 \Rightarrow 1 = 1$)
"Все крокодилы оранжевые"$\Rightarrow$ "Русалок не существует"($0 \Rightarrow 1 = 1$)
"из лжи следует истина"
– из лжи следует что угодно ($f_{14}(0, x) = 1$)
"Русалки существуют"$\Rightarrow$ "Драконы существуют"($0 \Rightarrow 0 = 1$)
Например, если одновременно $x = 0$ и $x = 1 \Rightarrow$ можно доказать, что $x = 5$
Замечание $x \Rightarrow y = 0$ только в случае, если $x = 1, y = 0$

$f_{15}(x, y)$ – штрих Шеффера
Обозначение: $x \mid y = \overline{xy}$

$f_{16}(x, y) =$ тождественная 1

Замечание Используя исключительно стрелку Пирса или штрих Шеффера можно выразить любую другую функцию

- $n = 3 : 2^8 = 256$ функций $f(x, y, z)$

Определение Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных и операций $0\ 1\ \neg\ *\ \vee\ \Rightarrow\ \Leftarrow\ +\ \equiv\ \mid\ \downarrow\ \lhd\ \rhd$

Примеры:

$(x \vee y)z$
$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$
$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение Значения логического выражения можно записать Таблицей истинности

$f(x, y, z) = (x \vee y)z$

$x\ y\ z$	$f(x, y, z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	0
1 1 1	1

Замечания

– Порядок строчек в таблице истинности может быть любым, но мы возьмём порядок двоичных чисел: 000 001 010 011 100 101 110 111

– Таблицы истинности часто считают постепенно

$x\ y\ z$	$(x \vee y)$	$(x \vee y)z$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	1
1 0 0	1	0
1 0 1	1	1
1 1 0	1	0
1 1 1	1	1

Замечание

Приоритет операций в исчислении высказываний:

$\neg$

$*$

$\vee$

$+ \equiv$

$\Rightarrow \Leftarrow$

$| \downarrow \lhd \rhd$

Примеры:

$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$

$x \vee yz = x \vee (yz) \neq (x \vee y)z$

$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$

$\overline{x \vee y} = \neg(x \vee y)$

Алгебраические преобразования логических выражений

Алгебраические преобразования логических выражений — изменение выражения по правилам, обычно в сторону упрощения
Например, $\underbrace{(0 \Rightarrow x)}_{1} \vee (1 \Rightarrow y) = \underbrace{1 \vee (1 \Rightarrow y)}_{1 \vee \alpha = 1} = 1$

• Отрицание
$\neg \bar{x} = x$
Доказательство

x	$\bar{x}$	$\neg \bar{x}$
0	1	0
1	0	1

• $\vee$
$1 \vee x = 1$
$0 \vee x = x$
Доказательство

x	$0 \vee x$
0	$0 \vee 0 = 0$
1	$0 \vee 1 = 1$

$x \vee y = y \vee x$ (Симметричность)
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (Ассоциативность)
$x \vee \bar{x} = 1$
Доказательство

x	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

• $\wedge$
$xy = yx$
$x(yz) = (xy)z$
$x * 0 = 0$
$x * 1 = x$
$x * x = x$
$x * \bar{x} = 0$
• $+, \oplus$
$x + y = y + x$
$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x + 0 = x$
$x + 1 = \bar{x}$
$x + x = 0$

$x + \bar{x} = 1$

Доказательство

$x + \bar{x} = x + (1 + x) = x + 1 + x = 1 + x + x = 1 + 0 = 1$

• $\Rightarrow$

$x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$x\ y$	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

$x \Rightarrow 0 = \bar{x}$

Доказательство

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$0 \Rightarrow x = 1$

$x \Rightarrow 1 = 1$

$1 \Rightarrow x = x$

$x \Rightarrow x = 1$

$x \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}$

$\bar{x} \Rightarrow x = x$

$x \Rightarrow y \Rightarrow z$: договоримся, что это $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$

$x\ y\ z$	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

• $\Leftrightarrow$

$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$

$x \Leftrightarrow 0 = \bar{x}$

$x \Leftrightarrow 1 = x$

$x \Leftrightarrow x = 1$

$x \Leftrightarrow \bar{x} = 0$

$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$ (Ассоциативность)

Логические законы

Дистрибутивность
$(x \vee y)\&z = x\&z \vee y\&z = y\&z \vee x\&z$
$(x+y)z = xz + yz$
$(x\&y) \vee z = (x \vee z)\&(y \vee z) = (y \vee z)\&(x \vee z)$

Замечание $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 =$
$= x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

Интересно ... $xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z =$
$= xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(\underbrace{x \vee y \vee 1}_{1}) = xy \vee z * 1 = xy \vee z$

$x + y = \overline{x \Leftrightarrow y}$
$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Leftrightarrow y$

1.2 Многочлен Жегалкина

Замечание Одну и ту же функцию можно записать по-разному
<u>В алгебре:</u> $f(x) = x + 1 = 1 + x = cos(x - x) + x = \dots$
$g(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = \dots$
<u>В логике:</u> $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)\underbrace{(y \vee \bar{y})}_{1} = x\bar{y} \vee y$

Определение Многочлен Жегалкина для логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$ — это многочлен с переменными x_i , константами 0, 1 и со степенями переменных ≤ 1

Альтернативное определение Многочлен Жегалкина для логической функции $f(x_1, \dots, x_n)$ — это многочлены от x_i над $\mathbb{Z}_2$

<u>Примеры:</u>
$f(x, y, x) = 1 + x + yz + xyz$ (Коэффициенты при остальных слагаемых $= 0$)
$f(x, y, x) = 1 + x$
$f(x, y, x) = 1 + xy$
$f(x, y, x) = 1 + xy + xyz$

<u>**НЕ** многочлены Жегалкина:</u>
$1 + x + \cancel{(y \vee z)}$
$1 + x + \cancel{z^2}$

Замечание В общем случае многочлен ($a_i = 0$ или 1):
от 1 переменной $a_0 + a_1x$
от 2 переменных $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$
от 3 переменных $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$
...
В общем случае $f(x_1, \ldots, x_n) : a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 + \cdots + ax_{n-1}x_n + ax_1x_2x_3 + \cdots + ax_{n-2}x_{n-1}x_n + \cdots + ax_1x_2 \ldots x_n$
(Рассматриваем все пары, тройки, ... переменных)

Утверждение
$\forall f(x_1, \ldots, x_n)$ — логической функции $\exists!$ многочлен Жегалкина $g(x_1, \ldots, x_n)$: $f = g$

Пример:
Всего существует 4 функции от 1 переменной:
$f(x) = 0 = \quad 0 \quad = 0 + 0x$
$f(x) = 1 = \quad 1 \quad = 1 + 0x$
$f_(x) = x = \quad x \quad = 0 + 1x$
$f(x) = \bar{x} = \underbrace{1 + x}_{\text{Многочлены}} = 1 + 1x$

Доказательство
I. Разные многочлены — это разные логические функции. То есть
$f(x_1, \ldots, x_n) = a_0 + \cdots + ax_1x_2 \ldots x_n$
$g(x_1, \ldots, x_n) = b_0 + \cdots + bx_1x_2 \ldots x_n$
$\exists i : a_i \neq b_i$
Возьмём различающийся индекс с самым маленьким количеством переменных
Пример:
$f(x, y, x) = 1 + x + xy + xyz = \cdots + 1x + 0y + 0z + 1xy + \ldots$
$g(x, y, x) = 1 + y + z + xyz \quad = \cdots + \underbrace{0x}_{min} + 1y + 1z + 0xy + \ldots$
Для переменных этого слагаемого подставим 1,
для остальных слагаемых — 0
[В примере $x = 1, y = 0, z = 0 : f(1,0,0), g(1,0,0)$]
И в f, и в g все другие слагаемые $= 0$, поскольку в них обязательно есть нулевая переменная
Тогда
$f(x_1, \ldots, x_n)$ $(= a_i \underbrace{x_. x_. \ldots x_.}_{1} = a_i)$ и $g(x_1, \ldots, x_n)$ $(= b_i \underbrace{x_. x_. \ldots x_.}_{1} = b_i)$
$a_i \neq b_i \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \neq g(x_1, \ldots, x_n)$

Мы нашли точку, в которой они различаются, $\Rightarrow$ они различаются всегда

II. Проверим, что многочленов Жегалкина от n переменных столько же, сколько функций от n переменных

$a_0 + \dots + ax_1x_2 \dots x_n$

Посчитаем количество слагаемых

1) 1 слагаемое без переменных, n слагаемых с одной переменной

$(a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$

C_n^2 слагаемых с двумя переменными

C_n^3 слагаемых с тремя переменными

...

C_n^n слагаемых с n переменными

Всего: $\underbrace{C_n^0}_{1} + C_n^1 + \dots + C_n^n =$ [С помощью комбинаторики] $= 2^n$

<u>Пример:</u>

от 1 переменной $a_0 + a_1x$ — 2 слагаемых $= 2^1 = 2$

от 2 переменных $a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ — 4 слагаемых $= 2^2 = 4$

от 3 переменных $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$ — 8 слагаемых $= 2^3 = 8$

2) Все слагаемые имеют вид: $\underbrace{x_1x_2 \dots x_n}_{\text{Каждая переменная 0 или 1}} = 2^n$ слагаемых

Итого, многочлен Жегалкина от n переменных имеет 2^n слагаемых

$a_0 + \dots + a_{2^n-1}x_1x_2 \dots x_n$

Сколько разных многочленов?

Каждое a_i — это 0 или 1

Ответ: 2^{2^n}, и это столько же, сколько логических функций

Итого, количество логических функций от n переменных

и многочленов Жегалкина от n переменных совпадает

$\blacksquare$

Следствие Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

Примеры:

$f(x,y) = x * y$ — уже многочлен Жегалкина

$f(x,y) = x \vee y$ — не многочлен Жегалкина

Подберём, воспользовавшись

Методом неопределённых коэффициентов: $x \vee y = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$

$f(0,0) = 0 = a_0 + a_1 0 + a_2 0 + a_3 0 = a_0 \Rightarrow a_0 = 0$

$f(1,0) = 1 \vee 0 = 1 = a_0 + a_1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 1$

$f(0,1) = 0 \vee 1 = 1 = a_0 + a_2 = a_2 \Rightarrow a_2 = 1$

$f(x,y) = 1 + 1 + a_3 xy$

$f(1,1) = 1 \vee 1 = 1 = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3 \Rightarrow a_3 = 1$

Ответ: $x \vee y = x + y + xy$

Другой способ получить многочлен Жегалкина из $x \vee y$

Преобразуем $x \vee y$

С учётом $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$ и $\bar{x} = 1 + x$

$x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = \underbrace{1+1}_{0} + x + y + xy = x + y + xy$

Многочлен Жегалкина для $x \Leftrightarrow y$

$x \Leftrightarrow y = \overline{x+y} = 1 + x + y$

Многочлен Жегалкина для $x \Rightarrow y$

$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = (1+x) \vee y =$

С учётом $x \vee y = x + y + xy$

$= (1+x) + y + (1+x)y = 1 + x + \underbrace{y+y}_{0} + xy = 1 + x + xy$

Итого, $x \Rightarrow y = 1 + x + xy$

Замечание Если есть логическая формула, её можно привести к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

- Методом неопределённых коэффициентов
- Методом алгебраических преобразований

Например:

$x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = \cdots = x + y + xy$

$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y = \cdots = 1 + x + xy$

$x \Rightarrow (y \vee \bar{z}) =$ (Также можно сказать, что $(y \vee \bar{z}) = (z \Rightarrow y)$) $\downarrow$

$= x \Rightarrow (y + \bar{z} + y\bar{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y(1+z)) = x \Rightarrow (1 + z + yz) =$

$= 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

$x \Rightarrow (y \vee \bar{z}) = 1 + xz + xyz$

$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1+(1+x+y)+z = \underbrace{1+1}_{0}+x+y+z = x+y+z$

<u>*Вывод*</u> Заранее не ясно, сложно ли привести функцию к многочлену Жегалкина

1.3 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

Определение Литерал — это переменная или отрицание переменной
Например, $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$

Определение Конъюнкт — конъюнкция литералов
Например, $x, x\bar{y}, xyz, xy\bar{z}, \underbrace{\bar{y}}_{\text{один литерал}}, \underbrace{\square}_{\text{пустой конъюнкт}}$
Не является конъюнктом $\cancel{\overline{xy}}, \cancel{x \vee y}$

Определение Логическое выражение имеет дизъюнктивно-нормальную форму, если она является дизъюнкцией конъюнктов
Например, $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z}t \vee z \vee \bar{x}y$

Не ДНФ: $\overline{xy}$
Но если преобразовать $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$
ДНФ: $\bar{x} \vee \bar{y}$

Построение ДНФ по таблице истинности функции

Алгоритм (на примере 3 переменных)

$x\ y\ z$	$f(x,y,z)$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	0

Берём строки с $f(x, y, z) = 1$
Допустим, есть строка
$x = a_1$ (0 или 1)
$y = a_2$ (0 или 1)
$z = a_3$ (0 или 1)

В ответ добавляется конъюнкт трёх литералов: xyz

Если значение переменной 0 — литерал берётся с отрицанием, если значение переменной 1 — литерал берётся без отрицания

$x\ y\ z$	$f(x, y, z)$	
0 0 0	0	
0 0 1	0	
0 1 0	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0 1 1	1	$\bar{x}yz$
1 0 0	0	
1 0 1	0	
1 1 0	1	$xy\bar{z}$
1 1 1	0	

Ответ: $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}$

Доказательство корректности алгоритма
Когда полученная ДНФ = 1?
Когда есть конъюнкт = 1

Если первый конъюнкт = 1 (В примере $\bar{x}y\bar{z} = 1$)
$\Rightarrow$ все его литералы = 1 (В примере $x = 0, y = 1, z = 0$)

Если второй конъюнкт = 1 (В примере $\bar{x}yz = 1$)
$\Rightarrow$ все его литералы = 1 (В примере $x = 0, y = 1, z = 1$)

Если третий конъюнкт = 1 (В примере $xy\bar{z} = 1$)
$\Rightarrow$ все его литералы = 1 (В примере $x = 1, y = 1, z = 0$)

$x\ y\ z$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}yz$	$xy\bar{z}$	Ответ $= f(x,y,z)$
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	0	1	0	1
1 0 0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	0

Замечание У одной функции могут быть разные ДНФ

$$\underbrace{\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee xy\bar{z}}_{\text{ДНФ}} =$$

$$= \bar{x}y(\underbrace{\bar{z} \vee z}_{1}) \vee xy\bar{z} = \underbrace{\bar{x}y \vee xy\bar{z}}_{\text{ДНФ}}$$

$$= (x \vee \bar{x})y\bar{z} \vee \bar{x}yz = \underbrace{y\bar{z} \vee \bar{x}yz}_{\text{ДНФ}} = y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \underbrace{x\bar{x}}_{0} \dots = \infty \text{ способов}$$

Как получать ДНФ для формулы/функции?

- По таблице истинности
- Алгебраическими преобразованиями

$x = x$

$\bar{x} = \bar{x}$

$x \vee y = x \vee y$

$xy = xy$

$x \Rightarrow y = \bar{x} \vee y$

$$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x) = \underbrace{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}x \vee y\bar{y} \vee yx}_{\text{ДНФ}} =$$

$$= \underbrace{\bar{x}\bar{y} \vee yx}_{\text{ДНФ}}$$

$x\ y$	$x \Leftrightarrow y$	
0 0	1	$\bar{x}\bar{y}$
0 1	0	
1 0	0	
1 1	1	xy

$x \Leftrightarrow y = \bar{x}\bar{y} \vee yx$

$x+y = \overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x)} = \overline{(\bar{x} \vee y)(\bar{y} \vee x)} = \overline{\bar{x} \vee y} \vee \overline{\bar{y} \vee x} = \neg\bar{x} * \bar{y} \vee \neg\bar{y} * \bar{x} = x\bar{y} \vee \bar{x}y$

x y	$x+y$	
0 0	0	
0 1	1	$\bar{x}y$
1 0	1	$x\bar{y}$
1 1	0	

$x+y = x\bar{y} \vee \bar{x}y$

Пример:
$x \Rightarrow (y+z) = \bar{x} \vee (y+z) = \bar{x} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$

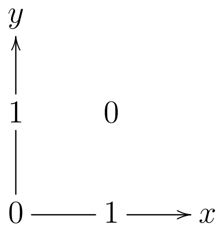
Задача (не)выполнимости
Дана логическая формула в ДНФ
Проверить, бывает ли она равна 0?
$\bar{x}\bar{y} \vee x \vee y$
Для этого и x, и y должны быть $= 0$, однако в этом случае $\bar{x}\bar{y} = 1$
$\Rightarrow$ не бывает

Если знать значения переменных(ответ) для 0, то их можно быстро проверить
Подобрать значения переменных для 0 — трудно
Не известно алгоритма, который "принципиально" быстрее полного перебора

Нерешённая проблема компьютерных наук:
сравнение классов P и NP
P — задача, которую можно эффективно решить
NP — задача, которую можно эффективно проверить
Эта задача из класса NP: если бы для неё нашёлся эффективный алгоритм, классы P и NP совпали бы, то есть эти классы совпали бы для любой задачи такого рода
Та задача, к которой сводится задача выполнимости, — тоже сложна:
- упростить логическое выражение
- поиск минимальной ДНФ

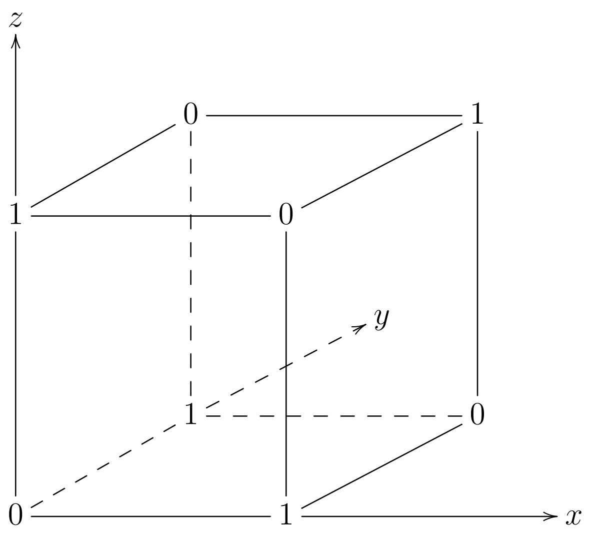
Запись таблицы истинности в виде графика

$f(x, y) = x + y$



$f(0, 0) = 0$
$f(0, 1) = 1$
$f(1, 0) = 1$
$f(1, 1) = 0$

$f(x, y, z) = x + y + z$

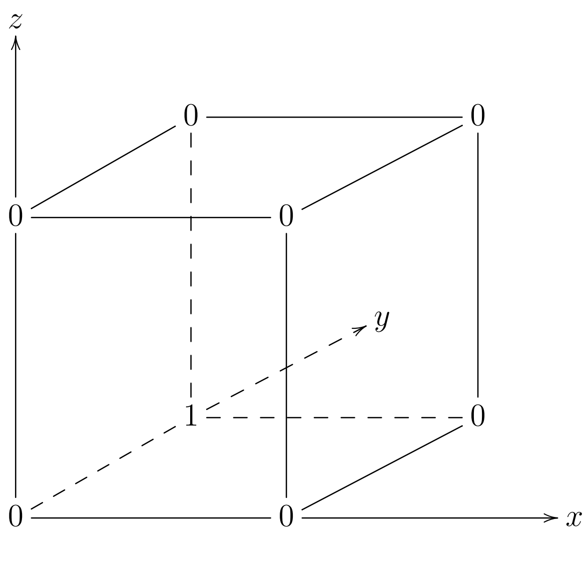


Задача минимизации ДНФ
<u>Дано:</u> логическая функция (в виде ДНФ)
<u>Найти:</u> самую короткую эквивалентную ДНФ
(с минимальным количеством литералов и $\vee$)
Например, $\bar{x}\bar{y} \vee \bar{z}$ короче $xy \vee yz$

Замечание
Далее в этом разделе рассматриваем только $f(x, y, z)$

Замечание
• Какова таблица истинности для $\overset{a}{X}\overset{b}{Y}\overset{c}{Z}$?
$a = 0$ или 1
$b = 0$ или 1
$c = 0$ или 1
0 — отрицание; 1 — без отрицания

Пример:
$\bar{X}Y\bar{Z}$
$a = 0$
$b = 1$
$c = 0$
Если $\bar{X}Y\bar{Z} = 1$, то $\bar{X} = 1, Y = 1, \bar{Z} = 1 \Rightarrow X = 0, Y = 1, Z = 0$
Если $\bar{X}Y\bar{Z} = 1$, то $X = a, Y = b, Z = c$

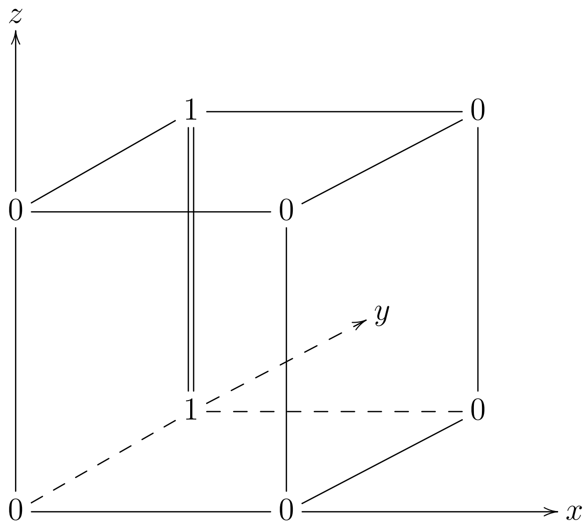


• Какова таблица истинности для $\overset{a}{X}\overset{b}{Y}$?

Если $\overset{a}{X}\overset{b}{Y}=1$, то $\overset{a}{X}=1, \overset{b}{Y}=1 \Leftrightarrow X=a, Y=b$

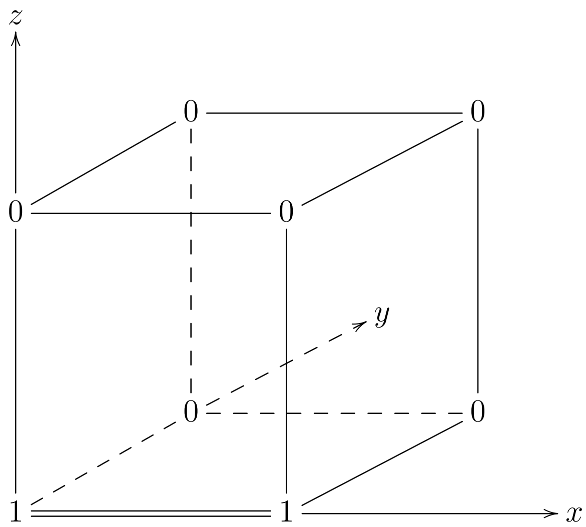
Пример:

$\bar{X}Y$



$\bar{X}Y$ — единицы на ребре $x=0, y=1, z=?$

Аналогично, $\bar{Y}\bar{Z}$

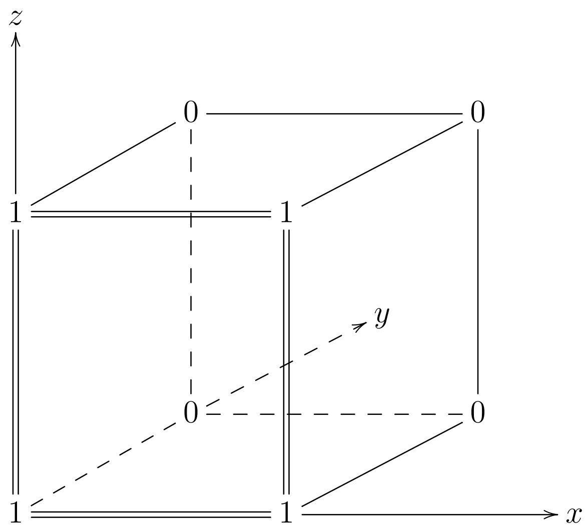


$\bar{X}Y$ — единицы на ребре $y=0, z=1, x=?$

• Какова таблица истинности для конъюнкта из одного литерала $X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, Z, \bar{Z}$?

Например, $\bar{Y}$

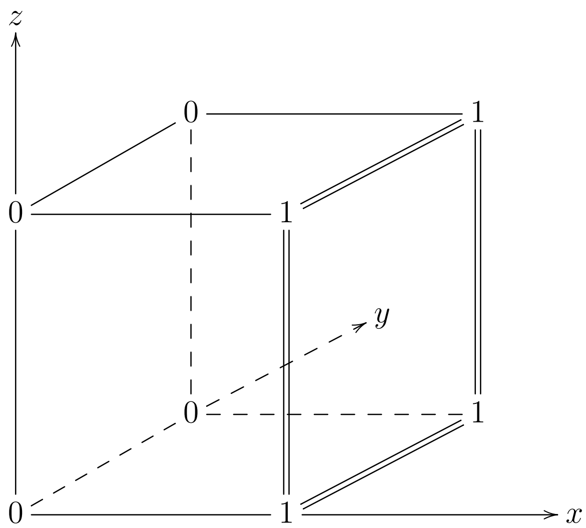
$\bar{y} = 1 \Rightarrow y = 0$



$\bar{Y}$ — грань $y = 0$

Например, X

$x = 1$



X — грань $x = 0$

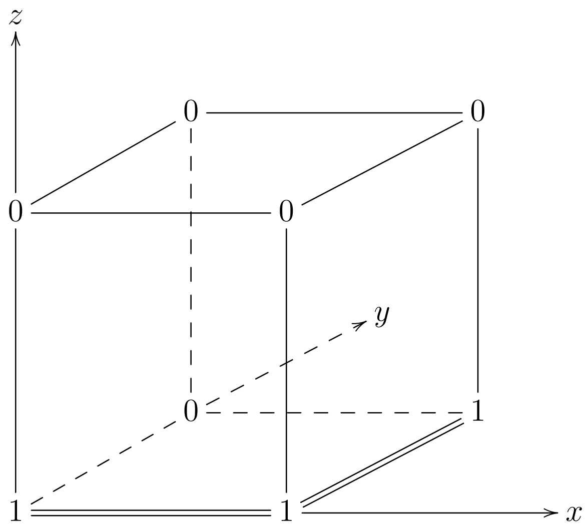
Итого,

Таблица истинности для $\overset{a}{X}\overset{b}{Y}\overset{c}{Z}$ — это вершина: $X = a, Y = b, Z = c$

Таблица истинности для $\overset{a}{X}\overset{b}{Y}$ — это ребро: $X = a, Y = b$

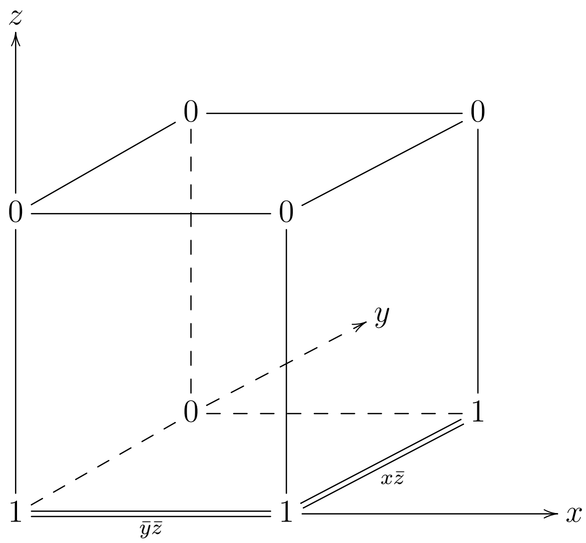
Таблица истинности для $\overset{a}{X}$ — это грань: $X = a$

Попробуем минимизировать ДНФ
<u>Пример 1:</u>
Дано: $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$
Найти: самый короткий ДНФ
Рисуем таблицу истинности

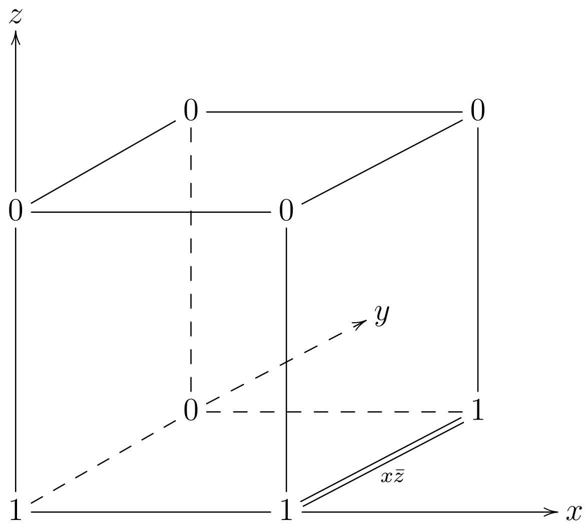


$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — вершина (0,0,0)
$x\bar{y}\bar{z}$ — вершина (1,0,0)
$xy\bar{z}$ — вершина (1,1,0)

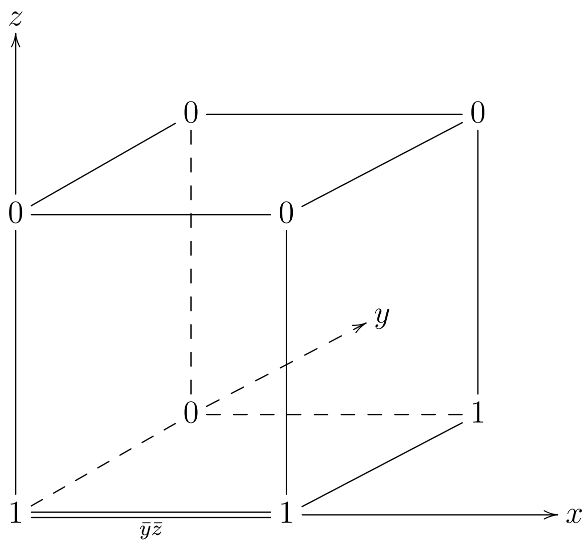
Иначе это можно записать как $\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$



Иначе это можно записать как $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$



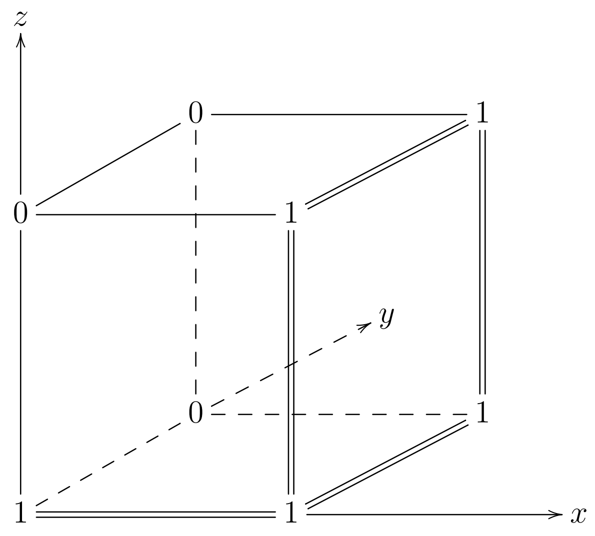
Иначе это можно записать как $\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$



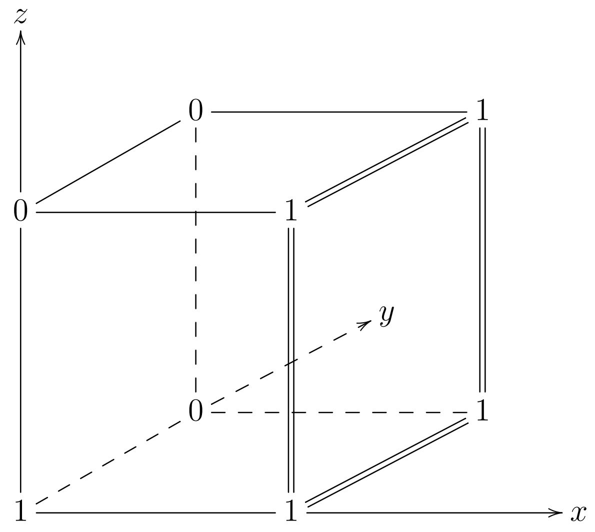
То есть $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} =$
$= \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} =$
$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} =$
$= \bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$
Самая короткая ДНФ, ответ: $\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}$

Пример 2:

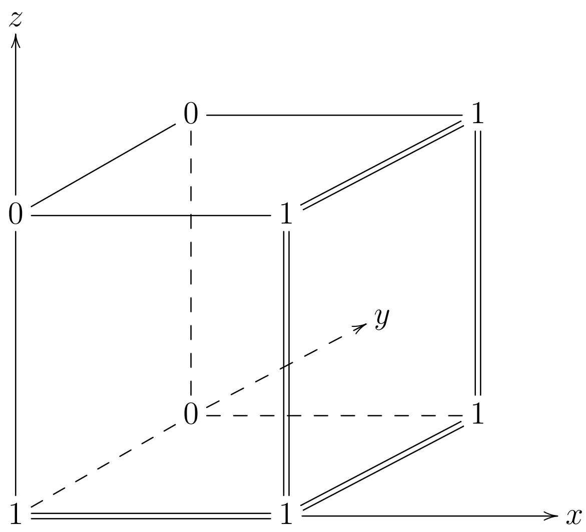
$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy$



Иначе это можно записать как $x \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$



Иначе это можно записать как $x \vee \bar{y}\bar{z}$



$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y} \vee xy =$
$= x \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} =$
$= x \vee \bar{y}\bar{z}$
Самая короткая ДНФ, ответ: $x \vee \bar{y}\bar{z}$

Замечание
Этот метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ
и выбрать минимальную
Метод алгебраических преобразований не позволит проверить, что ответ оптимальный

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} = \underbrace{(\bar{x} \vee x)}_{1}\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z}\underbrace{(\bar{y} \vee y)}_{1} =$$

$$= \bar{y}\bar{z} \vee x\bar{z} = \underbrace{\ldots}_{\text{Вдруг можно короче?}}$$

Определение Двойственная функция
$\sqsupset$ есть $f : \wp^n \to \wp = \{0, 1\}$
Двойственная $f^* : \wp^n \to \wp : f^*(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$

Замечание

Смысл двойственной функции заключается в переходе в мир замены лжи на истину $(0 \leftrightarrow 1)$

x y	$x \vee y$
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

"Новый мир"

x y	$f^*(x, y) = x \wedge y$
1 1	1
1 0	0
0 1	0
0 0	0

Проверим, что $(x \vee y)^* = xy$ по определению:
$(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \neg\bar{x} * \neg\bar{y} = xy$

$(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = 1 + (1 + x) + (1 + y) = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$

Замечание
$f^{**}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = \neg\overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})} = f(x_1, \dots, x_n)$
То есть $f^{**} = f$

<u>Следствие</u>
$(xy)^* = x \vee y$
$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$

Теорема о композиции
$f(x_1, \ldots, x_m) = f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$
$f_i = \wp^n \to \wp, i = 1..m$
$f_0 = \wp^m \to \wp$

Тогда $f^*(x_1, \ldots, x_m) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), f_2^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$

Доказательство
$f^* = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_m})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}), \ldots, f_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n}))} =$
$= f_0^*(\overline{f_1(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}, \overline{f_2(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}, \ldots, \overline{f_m(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})}) =$
$= f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n), f_2^*(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$
$\blacksquare$

Следствие
Если есть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — записано как логическое выражение с $\vee, *, \neg, +, \Leftrightarrow$, то f^* — такое же выражение, но связки заменены на двойственные:
$\vee \leftrightarrow *$
$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$
$\neg \leftrightarrow \neg$

Пример:
$f(x, y, z) = \overline{x \vee (\bar{y}z)} \Leftrightarrow (x + y + z)$
$f^*(x, y, z) = \overline{x * (\bar{y} \vee z)} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$

$1^* = 0$
$0^* = 1$

1.4 Конъюнктивно-нормальная форма (КНФ)

Определение Литерал — это переменная или отрицание переменной
Например, $x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{z}$
Определение Дизъюнкт — дизъюнкция литералов
Например, $x \vee y, x \vee y \vee \bar{z}, x \vee \bar{z}, \bar{x}$
Не является дизъюнктом, например, $\cancel{\bar{x}y}$, $\cancel{x \vee yz}$

Определение Конъюнктивно-нормальная форма (КНФ)
— это конъюнкция нескольких дизъюнктов
Например, $(x \vee y)(y \vee \bar{z}), (x \vee y)z, xyz, x \vee z$
Не является КНФ, например, $\cancel{xy \vee z}$, но является $(x \vee z)(y \vee z)$

Утверждение У любой логической функции есть КНФ, её можно построить по таблице истинности

Доказательство

Заметим, что если вычислить (КНФ)* (двойственную к КНФ), то получится ДНФ

Пример:

$[(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(\bar{y} \vee \bar{z})]^* = (xyz) \vee (x\bar{y}) \vee (\bar{y}\bar{z}) = xyz \vee x\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z}$

и наоборот: (ДНФ)* = КНФ

Итого, чтобы получить КНФ для функции f, надо построить ДНФ для f^*

ДНФ для f^* — существует

■

Пример:

$f(x, y, z) = xy \Leftrightarrow z$

$x\ y\ z$	xy	f	f^*	ДНФ для f^*
0 0 0	0	1	0	
0 0 1	0	0	1	$\bar{x}\bar{y}z$
0 1 0	0	1	1	$\bar{x}y\bar{z}$
0 1 1	0	0	0	
1 0 0	0	1	1	$x\bar{y}\bar{z}$
1 0 1	0	0	0	
1 1 0	1	0	1	$xy\bar{z}$
1 1 1	1	1	0	

$f^*(x, y, z) = \overline{f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})}$

$f^*(0,0,0) = \overline{f(1,1,1)}$

$f^*(0,0,1) = \overline{f(1,1,0)}$

$f^*(0,1,0) = \overline{f(1,0,1)}$

Столбец f^* — отрицание перевёрнутого столбца f

Итого, $f^* = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z}$

По теореме о композиции, $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$

Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции
$f(x, y, z) = xy \Leftrightarrow z$

$x\ y\ z$	f	ДНФ для f^*
0 0 0	1	
0 0 1	0	$x \vee y \vee \bar{z}$
0 1 0	1	
0 1 1	0	$x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$
1 0 0	1	
1 0 1	0	$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1 1 0	0	$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1 1 1	1	

В столбце значений переменных:
— 1: есть отрицание
— 0: нет отрицания

Ответ: $f = (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})$

ДНФ — строки с 1 $\begin{cases} 0 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ 1 \leftrightarrow xyz \end{cases}$

КНФ — строки с 0 $\begin{cases} 0 \leftrightarrow xyz \\ 1 \leftrightarrow \bar{x}\bar{y}\bar{z} \end{cases}$

<u>Пример 2:</u>
$f(x, y) = x + y$ в КНФ

$x\ y$	$x + y$	
0 0	0	$x \vee y$
0 1	1	
1 0	1	
1 1	0	1 $\bar{x} \vee \bar{y}$

Ответ: $(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$

Замечание

Для функции, записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости".

Вопрос: может ли значение быть $= 1$?
— не известно решений, принципиально эффективнее полного перебора значений переменных

<u>Пример:</u>
$(x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{z})$
При $(x = 1, y = 1, z = 0)$ значение функции $= 1$

Многие задачи, головоломки сводятся к задаче выполнимости

Пример:

Принцип Дирихле — если есть n клеток и в них $n+1$ заяц, то $\exists$ клетка, в которой ≥ 2 зайца

Докажем это утверждение при помощи сведения к задаче выполнимости при $n = 2$

$X_{i,j}$ — в клетке i сидит заяц j $\begin{cases} i &= \quad 1 \text{ или } 2 \text{ (клетка)} \\ j &= 1 \text{ или } 2 \text{ или } 3 \text{ (заяц)} \end{cases}$

Попробуем записать, что в каждой клетке ≤ 1 зайца:

I. Каждый заяц ровно в одной клетке

$X_{11} + X_{21}$ — заяц 1

$X_{12} + X_{22}$ — заяц 2

$X_{13} + X_{23}$ — заяц 3

(Если клеток много: $X_{1i}\bar{X}_{2i}\ldots\bar{X}_{ki} \vee \bar{X}_{1i}X_{2i}\ldots\bar{X}_{ki} \vee \cdots \vee \bar{X}_{1i}\bar{X}_{2i}\ldots X_{ki}$)

II. В каждой клетке ≤ 1 зайца

заяц / клетка	1	2	3
1	X_{11}	X_{12}	X_{13}
2	X_{21}	X_{22}	X_{23}

Если есть 2 зайца, то один из конъюнктов= 1

В клетке 1 ≤ 1 зайца: $\overline{X_{11}X_{12} \vee X_{11}X_{13} \vee X_{12}X_{13}}$

В клетке 2 ≤ 1 зайца: $\overline{X_{21}X_{22} \vee X_{21}X_{23} \vee X_{22}X_{23}}$

Соединяем все утверждения:

$(X_{11}+X_{21})(X_{12}+X_{22})(X_{13}+X_{23})\overline{(X_{11}X_{12} \vee X_{11}X_{13} \vee X_{12}X_{13})}\,\overline{(X_{21}X_{22} \vee X_{21}X_{23} \vee X_{22}X_{23})}$

= тождественный 0

$\overline{a \vee b} = \bar{a} * \bar{b}$

$\overline{a * b} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Преобразуем в КНФ:

$(X_{11} + X_{21})(X_{12} + X_{22})(X_{13} + X_{23}) =$

$= (X_{11} \vee X_{21})(\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{21})(X_{12} \vee X_{22})(\bar{X}_{12} \vee \bar{X}_{22})(X_{13} \vee X_{23})(\bar{X}_{13} \vee \bar{X}_{23})$

$\overline{(X_{11}X_{12} \vee X_{11}X_{13} \vee X_{12}X_{13})} = (\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{12})(\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{13})(\bar{X}_{12} \vee \bar{X}_{13})$

$\overline{(X_{21}X_{22} \vee X_{21}X_{23} \vee X_{22}X_{23})} = (\bar{X}_{21} \vee \bar{X}_{22})(\bar{X}_{21} \vee \bar{X}_{23})(\bar{X}_{22} \vee \bar{X}_{23})$

КНФ:
$(X_{11} \vee X_{21})(\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{21})(X_{12} \vee X_{22})(\bar{X}_{12} \vee \bar{X}_{22})(X_{13} \vee X_{23})(\bar{X}_{13} \vee \bar{X}_{23})$
$(\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{12})(\bar{X}_{11} \vee \bar{X}_{13})(\bar{X}_{12} \vee \bar{X}_{13})(\bar{X}_{21} \vee \bar{X}_{22})(\bar{X}_{21} \vee \bar{X}_{23})(\bar{X}_{22} \vee \bar{X}_{23})$

— берём программу, которая решает задачу выполнимости
Она скажет: невыполнима

Основные причины, по которым удобна КНФ:

1) КНФ в памяти компьютера представляет из себя список списков, что очень удобно в плане хранения и при работе

2) Почему не ДНФ? Поскольку требуется выполнение всех условий, их необходимо перемножить — однако при перемножении ДНФ не всегда получается ДНФ; в отличие от КНФ, при перемножении которых получается КНФ

Ещё один пример головоломки, сводящейся к задаче выполнимости: японский кроссворд

1.5 Классы замкнутости

Определение Логическая функция $f : \wp^n \to \wp$
$\wp = \{0, 1\}$

Класс — это множество логических функций
Примеры:
K_1 = класс функций от двух переменных
K_2 = класс функций от двух переменных : $f(x, y) = f(y, x)$ (симметричных)

$f(x, y) = x \vee y \in K_1, \in K_2$
$g(x, y) = x \Rightarrow y \in K_1, \notin K_2$

K_3 = класс функций : $f(x, \dots) = f(\bar{x}, \dots)$

$f(x, y, z) = y \Rightarrow z \in K_3$
$f(x, y, z) = (x \Rightarrow y) \vee z \notin K_3$
$f(x, y, z) = \underbrace{x\bar{x}}_{0} \vee y \vee z \in K_3$

$K_4 = \{f(x, y) = x \vee y, g(x, y) = x \Rightarrow y\}$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d] & y \arrow[dl] \arrow[dd] & z \arrow[ddl] \arrow[ddd] \\
f_1 \arrow[dr] & & \\
& f_2 \arrow[dr] & \\
& & f_3 \arrow[d] \\
& & g(x,\ y,\ z)
\end{tikzcd}
$$

$g(x, y, z) = \underbrace{f_1(f_2(f_1(x, y), y, z), z)}_{\text{композиция функций}}$

$\sqsupset K = \{f_1, f_2, \dots\}$– класс функций

K^*– замыкание класса — это класс, состоящий из всех композиций функций K

Примеры:

$K = \{f() = 0, g(x) = \bar{x}\}$

$K^* = \{0, g(x), \underbrace{g(f())}_{1}, \underbrace{g(g(f()))}_{0}, \underbrace{g(g(g(f())))}_{1}, \dots, \underbrace{g(g(x))}_{x}, \underbrace{g(g(g(x)))}_{\bar{x}}, \dots\}$

$K^* = \{x, \bar{x}, 0, 1\}$

$K = \{g(x) = \bar{x}\}$

$K^* = \{g(x), \underbrace{g(g(x))}_{x}, \underbrace{g(g(g(x)))}_{\bar{x}}, \dots\}$

$K^* = \{x, \bar{x}\}$

$K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$

$K^* = \{\forall$ функция $\}$ (поскольку можно составить любую ДНФ/КНФ)

Определение Если K– класс, $K^* = \zeta$ (все логические функции), то К — полный класс

Вывод: $K = \{\bar{x}, x \vee y, xy\}$ — полный класс

$K = \{f(x) = \bar{x}, f(x, y) = x \vee y\}$

$xy = \overline{(\overline{xy})} = \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} = f(g(f(x), f(y)))$

$K = \{\bar{x}, = x \vee y\}$ — тоже полный класс

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d] & & y \arrow[d] \\
f \arrow[dr] & & f \arrow[dl] \\
& g \arrow[d] & \\
& f \arrow[d] & \\
& xy &
\end{tikzcd}$$

$K = \{f(x, y) = xy, g(x, y) = x + y\}$

$f(0, 0) = 0$

$g(0, 0) = 0$

Следовательно, любая композиция функций, принимающая на вход только 0, будет $= 0$

Но если $h(0) = 0$, мы не сможем получить, к примеру, $\bar{x}$

$\bar{x} \notin K^*$

$K = \{xy, x + y\}$ — не полный класс