(Лекция№1 от 09.02)
Темы:
• Математическая Логика
-исчисление высказываний
-исчесление предикатов
• Теория формальных языков
-конечные автоматы(регулярные выражения)
-Контекстно свободные грамматики
-машины Тьюринга

1 Исчесление Высказываний

Логические функции
Определение
β ={0,1} 0-ложь/false
1-истина/true
-множество логических значений
Определение
Длштчнская функция(от n переменных)
f: $\beta^n \to \beta$
Замечание: Часто логические функции вводят перечислением возможных аргументов и значений для них
Примечание
f(x,y)

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ту же функцию можно задать формулой
f(x,y)=max(x,y)
Утверждение
Функций от n переменных может быть 2^{2^n}

x_1	x_2	...	x_n	
0	0	...	0	
0	0	...	1	
.	.	...	.	всего 2^n разных аргументов
.	.	...	.	
.	.	...	.	
1	1	...	1	

f(x_1...x_n) может принимать значения 0 или 1. Следовательно, 2^{2^n}
Следствие
n=1: $2^{2^1} = 4$ функций f(x)
n=2: $2^{2^2} = 16$ функций f(x,y)
n=1: $2^{2^3} = 256$ функций f(x,y,z)

x	$f_1(x)=0$	$f_2(x)=x$	$f_3(x)$	$f_4(x)=1$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_3-отрицание, $\overline{x}$(¬x, !x)

Прмимер

$\overline{0}$=1 $\overline{1}$=0 $\overline{00}$=0

x y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

x y	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_1(x,y)= нулевая ∅

f_2(x,y)= логическое ’и’(коньюнкция) f(x,y)=x•y x•y x&y x∧y

f_3(x,y)=x>y запрет по y = $\overline{x \Rightarrow y}$

f_4(x,y)=x

f_5(x,y)=x<y запрет по x =$\overline{x \Leftarrow y}$

f_6(x,y)=y

f_7(x,y)=исключающее или x+y= x xor y = (x+y) mod2

f_8(x,y)=логическое ’или’ f(x,y)=max(x,y) x∨y если истина зотя бы одна

f_9(x,y)=x↓y=$\overline{x \vee y}$ стрелка Пирса

f_{10}(x,y)=эквивалентность x⇔y x≡y

f_{11}(x,y)=$\overline{y}$

f_{12}(x,y)=x⇐y=y⇒x обратная импликация

f_{13}(X,y)=$\overline{x}$

f_{14}(x,y)=$x \Rightarrow y$=x→ y

f_{15}(x,y)=x|y=$\overline{xy}$ штрих Шеффера

f_{16}(x,y)=единичная 1

Определение

Логическое выражение- способ задания логических функций с помощью переменных и операций

• ∨ ⇒ ⇐ + ≡ | ↓ < >

Пример

(x ∨ y)z

(x⇒yz)∨(y≡z)

(0→x)∨(1→y)- всегда истина

Определение

Значения логического выражения можно записать таблицей истинности

f(x,y,z)=(x∨y)z

x y z	$(x \vee y)z$	
0 0 0	0	(0∨0)0=0
0 0 1	0	(0∨0)1=0
0 1 0	0	(0∨1)0=0
0 1 1	1	(0∨1)1=1
1 0 0	0	(1∨0)0=0
1 0 1	1	(1∨0)1=1
1 1 0	0	(1∨1)0=0
1 1 1	1	(1∨1)1=1

Замечания

порядок строчек в таблице истинности(ТИ)
могут быть любими, но мы возьмем 000 001 010 011 100 101 110 111
Таблицу истинности часто считают постепенно

x y z	x∨ y	$(x \vee y)z$
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	1	0
0 1 1	1	1

Приоритет операций

$\neg$
$*$ $\bullet$
$\vee$
$+$ $\equiv$
$\Leftarrow$ $\Rightarrow$
$|$ $\downarrow$ $<$ $>$

Пример

¬x∨y=($\overline{x} \vee y$
x∨yz=x∨(yz)
$\overline{x \vee y} = \neg(x \vee y)$

Аонебраические преобразования логический выражений- изменяем выражения обычно в сторону упрощения
(0$\rightarrow$ x)∨(1→y)=1∨(1$\rightarrow$ y)=1

Утверждение

$\overline{\overline{x}} = x$

Докозательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

про ∨
1∨x=1
0∨x=x
x∨y=y∨x-симметричность

(Лекция№2 от 16.02)

Напоминание
-логические функции
-все 16 f(x,y)
-таблицы истинности

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	x*y
0	0	0
0	1	0
0	0.5	0
1	0.2	0.2

x	sin(x)
0	0
1	1
0	1

-порядок строк фиксирован

Таблица эквивалентности логических выражений

$\overline{\overline{x}} = x$ Докозательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

x∨y=y∨x-симметричность

1∨x=1

0∨x=x

x∨x=x

x∨$\overline{x}$=1

x	$\overline{x}$	x∨ $\overline{x}$
0	1	1
1	0	1

xy=yx

x*0=0

x*1=x

x*x=x

x*$\overline{x}$=0

x	$\overline{x}$	x $\overline{x}$
0	1	0
1	0	0

x+y=y+x

x+0=x

$$\left.\begin{array}{l} x+1=\overline{x} \\ x+x=0 \\ x+\overline{x}=1 \end{array}\right\} x+\overline{x}=x+1+x=1+0=1$$

Ассоциацивность

x∨$(y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

x(yz)=(xy)z

x+(y+z)=(x+y)+z

x⇒y¬y⇒x

x y	x⇒y	y⇒x
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

x⇒0=$\overline{x}$

0⇒x=1

x⇒1=x

1⇒x=x

x⇒x=1

x⇒ $\overline{x}$=$\overline{x}$

$\overline{x}$ ⇒x=x

x⇒y⇒z= договоримся =, что это x⇒(y⇒z)¬(x⇒y)⇒z

x y z	x⇒y	y⇒z	x⇒(y⇒z)	(x⇒)y⇒z
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	0	1	1
0 1 0	1	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

x⇔y=y⇔x

x⇔0=$\overline{x}$

x⇔1=x

x⇔x=1

x⇔ $\overline{x}$=0

x⇔(y⇔z)=(x⇔)y⇔z -ассоциативно

<u>Дистрибутивность</u>

(x∨y)∨z=xz∨yz

x y z	(x∨y)z	xz∨yz
0 0 0	0	0
0 0 1	0	0
0 1 0	0	0
0 1 1	1	1
1 0 0	0	0
1 0 1	1	1
1 1 0	0	0
1 1 1	1	1

(x+y)z=xz+yz так как обычные $+_2$ •

(x&y)∨z=xy∨z=(x∨z)(y∨z)

<u>Замечание</u>

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 =$

$= x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

(xy∨z)=(x∨z)(y∨z)=xy∨xz∨zy∨zz=xy∨xz∨zy∨zz=xy∨xz∨zy∨z*1=

=xy∨z(x∨y∨1)=xy∨z(x∨y∨1)=xy∨z*1=xy∨z- сошлось

x+y=$\overline{x \Leftrightarrow y}$

x y	(x∨y)z
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	0

(x⇒y)(y⇒x)=$\overline{x \Leftrightarrow y}$

2 Многочлены Жегалкина

Замечание
одну и ту же функцию можно записать по разному
В алгебре f(x)=1+x=x+1=x+5-4=cos(x-x)+x=...
g(x)=$x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = \dots$
В логике f(x,y)=x∨y=x∨y∨0=(x∨y)($\overline{y}$∨y)=x$\overline{y}$∨y- дистрибутивно
Определение
Многочлен Жегалкина для логическиой функции
f($x_1, x_2, \dots x_n$)- это многочлен с переменными x_i, константами 0,1 и со степенями перменных ≤1
или
это многочлен от x_i над $\mathbb{Z}_2$
Пример
f(x,y,z)=1+x+yz+xyz
1+x
1+xy
x+xyz
Не многочлены:
1+x+(y∨z)
1+x+z^2
Замечание
В общем случае многочлен:
от 1 переменной (a_i=0 или 1) $a_0 + a_1x$
от 2 переменных $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5zx + a_6yz + a_7xyz$
от 3 переменных $a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3 + \dots + ax_1x_2x_3 + ax_1x_2x_4 + \dots + ax_1x_2x_3 \dots x_n$
Утверждение
∀ f($x_1 \dots x_n$)-логическая функция ∃! многочлен Жегалкина
$g(x_1 \dots x_n) : f = g$
Примеры
f(x)=0=0=0+0x
f(x)=1=1=1+0x
f(x)=x=x=0+1x
f(x)=$\overline{x}$=1+X=1+1x
Докозательство
1.
разные многочлены- это разные логические функции, то есть f($x_1 \dots x_n$) = $a_0 + \dots + a_nx_1 \dots x_n$
g($x_1 \dots x_n$) = $b_0 + \dots + b_nx_1 \dots x_n$
$\exists i : a_i \neg b_i$
Возьмем различающийся индекс с самым min количеством переменных
Пример
f(x,y,z)=1+x+xy+xyz=...+1x+0y+0z+1xy
g(x,y,z)=1+y+z+xyz=...+0x+1y+1z+0xy
Для переменных этого слогаемого подставим 1

Для остальных переменных:0
(В примере x=1 y=0 z=0: f(1,0,0) и g(1,0,0))
И в f и в g все другие слогаемые равны 0 или совпадают
Теперь f(...) и g(...) $\Rightarrow$ f($x_1 \dots x_n$) $\neg$ g($y_1 \dots y_n$)
$a_i xxx \neg b_i xxx$, так как $a_i \neg b_i$
2.
Проверим, что многочленов столько же, сколько функций от n переменных посчитает
$a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_1 x_2 \dots x_n$
сколько слагаемых
1) 1 слагаемое без переменных и слагаемой с 1ой переменной
$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$
C_n^2слагаемых с 2 переменными
C_n^3слагаемых с 3 переменными
...
C_n^nслагаемых с n переменными
Всего $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \dots + C_n^n = 2^n$
Пример
$a_0 + a_1 x$- 2 слагаемых=2
$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy - 2^2$= 4 слагаемых
2) все слогаемые имеют вид: $x_1, x_2, x_3 \dots x_n - 2^n$
Итого многочлен Жегалкина от n переменных имеет 2^n слагаемых
теперь сколько разных многочленов?
Каждое a_i=0 или 1
Ответ: 2^{2^n} столько же, сколько логических функций
Итог:
Логические функции от n переменных(2^{2^n} штук)$\equiv$ многочленов Жегалкина от n перменных (2^{2^n} штук)
Следствие: любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина
Примеры
f(x,y)=x$\vee$y не многочлен Жегалкина
f(x,y)=x*y- многочлен Жегалкина
подберем x$\vee$ y=$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$
f(0,0)= 1$\vee$0=1
$a_0 + a_1 = 1$ $a_1 = 1$ f(0,1) аналогично
f(x,y)=x+y+$a_3$xy
f(1,1)=1$\vee$1=1
1+1+a_3=0+a_3=a_3 $\Rightarrow a_3 = 1$
Ответ: x$\vee$y=x+y+xy
(Лекция№3 от 02.03)
Все многочлены функции можно представить в виде многочлена

f(x)		многочлены
0	=	0
1	=	1
x	=	x
$\overline{x}$	=	1+x

f(x,y)		многочлены
0	=	0
1	=	1
xy	=	xy
x+y	=	x+y
x∨y	=	x+y+xy

x∨y=x+y+xy- Многочлен Жегалкина для ∨(Другой способ получить многочлен из x∨y)
Добавим формулы в список
$\overline{xy} = \neg(x,y) = \overline{x} \vee \overline{y}$
$\overline{x \vee y} = \overline{xy} = \overline{yx}$
Замечание $\overline{xy}$¬$\overline{yx}$
Докозательство в таблице истинности

x y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \bullet \overline{y}$
0 0	0	1	1	1
0 1	1	1	0	0
1 0	1	0	1	0
1 1	1	0	0	0

x∨y=$\overline{\overline{x} \bullet \overline{y}}$
$\overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = \underbrace{1+1}_{=0} + x + y + xy = x + y + xy$
Многочлен Жегалкина для ⇔?
x⇔y=$\overline{x+y} = 1 + x + y$
Многочлен Жегалкина для x⇒y
x⇒y=$\overline{x} \vee \overline{y}$
Если есть логическая функция, её можно привести к форме многочлена Жегалкина
-Метод неопределенных коэффициентов(смотри учебник Рыбина) $a_0 + a_1 x + a_2 y + \cdots + axyz$
-Метод алгебраических преобразований
Пример
$x \vee y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \cdots = x + y + xy$
$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \cdots = 1 + x + xy$ x⇒ $(y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y\overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1+z) + y(1+z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + xy + yz$-Ответ
$(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow= (1 + x + y) \Leftrightarrow z = 1 + (1 + x + y) + z = 1 + 1 + x + y + z = x + y + z$
Вывод: Заранее не ясно, сложно ли привести функцию к многочлену Жегалкина

3 Дизъюнктивно нормальная форма (ДНФ)

Определение
Литерал- это переменная или отрицание переменной
Например: x,$\overline{x}$, y, $\overline{y}$, z,$\overline{z}$

Определение

Конъюнкт- конъюнкция литералов

$x\overline{y}, xyz, \overline{xyz}, \overline{x}z, \overline{z}, \emptyset, \cancel{\overline{xy}}, \cancel{x \vee y}$

Определение

Логическое выражение, уравнение, имеет дизъюнктивно нормальную форму, если она является дизъюнкцией конъюнктов

Примеры

$x\overline{y} \vee \overline{xz}T \vee z \vee \overline{xy}$

$xy \vee \overline{xy}$

$x \vee y$

xy

НЕ ДНФ $\cancel{\overline{xy}}$ но $\overline{x} \vee \overline{y}$ ДНФ

$\cancel{x \Rightarrow yz} = \overline{x} \vee yz$

Построение ДНФ по таблице истинности

Алгоритм на примере 3х цифр

x y z	$\overline{x}y\overline{z}$	$\overline{x}yz$	$xy\overline{z}$	$\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee xy\overline{z}$
0 0 0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	0
0 1 0	1	0	0	1
0 1 1	0	1	0	1
1 0 0	0	0	0	0
1 0 1	0	0	0	0
1 1 0	0	0	1	1
1 1 1	0	0	0	0

Замечание

У одной функции могут быть разные ДНФ

$$\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee xy\overline{z} \quad \begin{aligned} &\overset{1}{=} \overline{x}y(\overline{z} \vee z) \vee xy\overline{z} = \overline{x}y \vee xy\overline{z} \\ &\overset{2}{=} (\overline{x} \vee x)y\overline{z} \vee \overline{x}yz - y\overline{z} \vee \overline{x}yz = y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{x} \vee y\overline{y} \vee = \infty \end{aligned}$$

Как получить ДНФ для формулы/функции

-по таблице истинности

-алгебраические преобразованиями

Примеры

$\overline{x} = \overline{x}$

$x \vee y = y \vee x$ 2 кон.

xy=yx 1 кон.

$x \Rightarrow \overline{x} \vee y$ 2кон.

$x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x)$ =раскроем скобки

$= \overline{xy} \vee \overline{x}x \vee y\overline{y} \vee yx = \overline{xy} \vee xy$

По Таблице Истинности

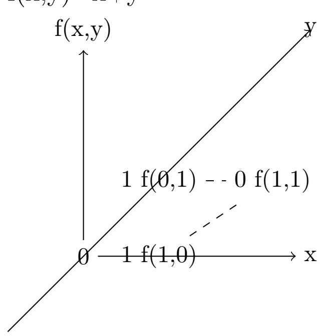
x y	$x \Leftrightarrow y$
0 0	1 ($\overline{xy}$)
0 1	0
1 0	0
1 1	1 (xy)

Пример, построить ДНФ

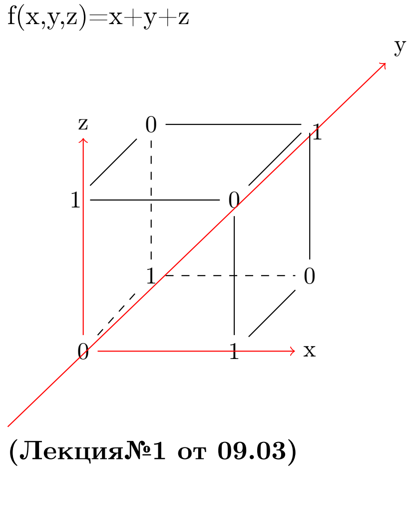
$x \Rightarrow (y+z)$
1)Таблица Истинности
2)преобразования $\overline{x} \vee (y+z) = \overline{xy}z \vee y\overline{z}$-Ответ
Задача
Дана логическая формула в ДНФ, проверить, бывает ли она равна 0
$\overline{xy} \vee x \vee y = 0$
x=0,y=0$\Rightarrow$ $\overline{xy} = 1$
эта задача
- Если знать значения перемнных(ответ) для 0, то их можно
быстро проверить
- Подобрать значения переменных для 0- трудно, не известно алгоритма,
который быстрее полного перебора
Задача в информатики P ?= NP
то, к чему сводится задача выполнимости- тоже слодна
-упростит логическое выражение
-поиск минимального ДНФ(следующий раз)

4 Запись таблицы истинности в виде графика

f(x,y)=x+y



f(x,y,z)=x+y+z



(Лекция№1 от 09.03)

5 Задача минимизации ДНФ

Дана: логическая функция(в виде ДНФ), найти самую короткую эквивалентную ДНФ(min количество литералов и дизъюнкция $\lor$)

$\overline{xy} \lor \overline{z}$	короче$xy \lor yz$
	короче$x\overline{y}\overline{z}TU$

Напоминание про куб

<u>Замечание</u>

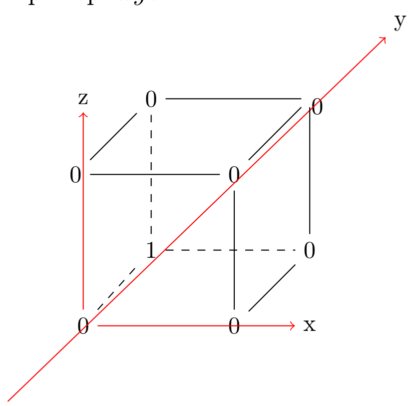
Далее рассматриваем только f(x,y,z)- 3 переменных

<u>Замечание</u>

Какова таблица истинности $\overset{abc}{xyz}$, где a=0/1 b=0/1 c=0/1

0- отрицание 1-без отрицния

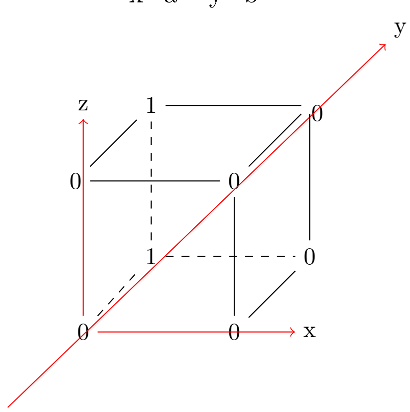
Пример: $\overline{x}y\overline{z}$



	если $\overline{x}y\overline{z}=1$, то	$\overline{x}=1$	y=1	z=1
Если $\overline{x}y\overline{z}=1$, то $\overline{x}=1$ x=0		x=0	y=1	z=0
	если xyz=1, то	x=a	y=b	z=c

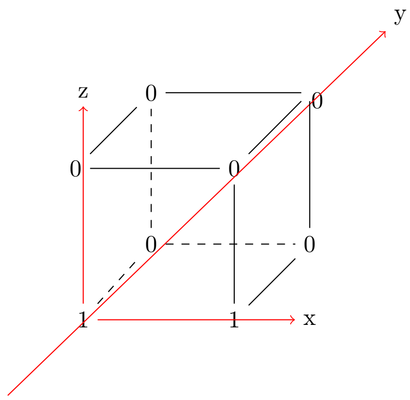
Какова таблица истинности из двух $\overset{ab}{xy}$?

xy=1 $\Leftrightarrow$	x=1	y=1
	x=a	y=b

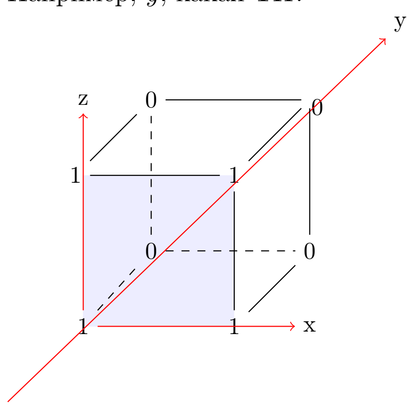


$\overline{x}y$-единцы, на ребре x=0 y=1 z=?

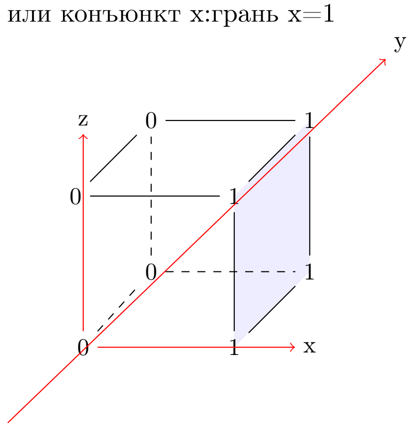
аналогично $\overline{yz}$рисуем ТИ
ребро y=0 z=0



Последнее, конъюнкт из 1 литерала
x,y,z,$\overline{x}$, $\overline{z}$, $\overline{y}$
Например, $\overline{y}$, какая ТИ?

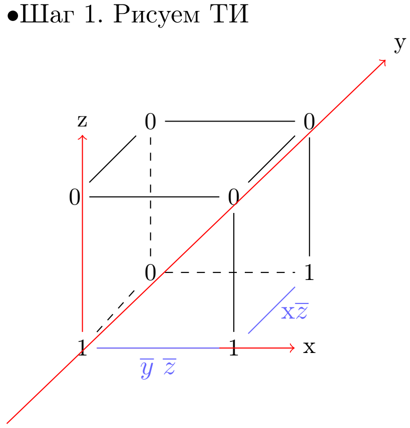


y=0
или конъюнкт x:грань x=1

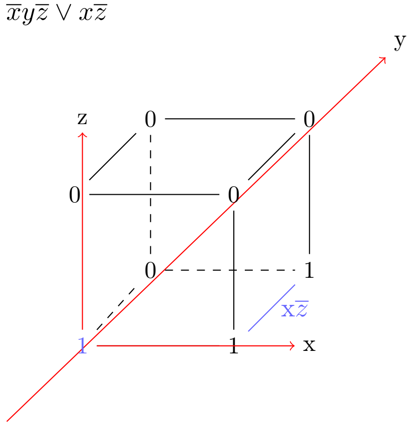


Итого ТИ:

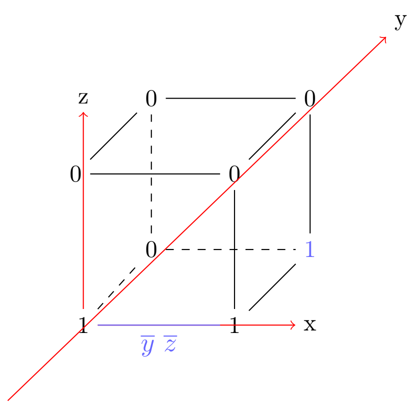
$\overset{abc}{xyz}$- это вершина x=a y=b z=c
$\overset{ab}{xy}$- это ребро x=a y=b
$\overset{a}{x}$- это грани x=a
Попробуем минимизировать ДНФ
Пример
$\overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{y}\overline{z} \vee xy\overline{z}$
Найти самый короткий ДНФ для неё
•Шаг 1. Рисуем ТИ



$\overline{x}\overline{y}\overline{z}$-вершина 0,0,0
$x\overline{y}\overline{z}$-вершина 1,0,0
$xy\overline{z}$-вершина 1,1,0
Другие ДНФ
$\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{z}$
или
$\overline{x}\overline{y}\overline{z} \vee x\overline{z}$



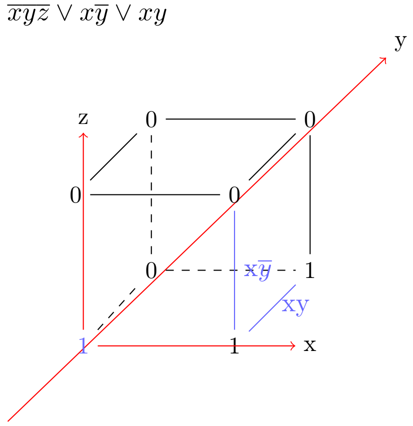
$\overline{y}\overline{z} \vee xy\overline{z}$



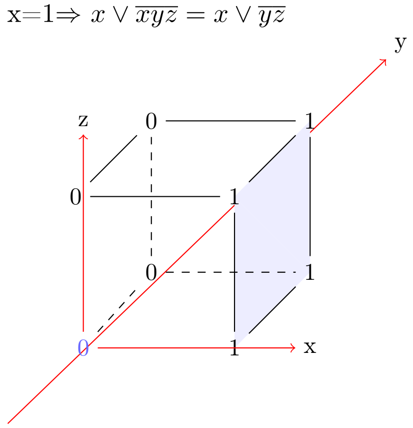
то есть $\overline{xyz} \vee x\overline{yz} = \overline{yz} \vee x\overline{z} = \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{z} = \overline{yz} \vee xy\overline{z}\ \overline{yz} \vee x\overline{z}$- самый короткий ответ

Пример 2

$\overline{xyz} \vee x\overline{y} \vee xy$



x=1⇒ $x \vee \overline{xyz} = x \vee \overline{yz}$



Замечание:

этот метод позволяет нагдядно перебрать все ДНФ и выбрать min

Преобразования не позволяют проверить оптимальность

Пример преобразований
$\overline{xyz} \vee x\overline{yz} \vee xy\overline{z} = (\overline{x} \vee x)\overline{y}z \vee x\overline{yz} \vee xy\overline{z} = \overline{y}z \vee x\overline{z}(\overline{y} \vee y) = x\overline{z} \vee \overline{y}z$ =возможно короче

6 Двойственная функция

Пусть есть f: $B^n \to B = 0, 1$
Двойственная f^*:$B^n \to B : f^*(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \ldots, x_n)}$
Замечание: мир замены лжи на истину
f(x,y)=$x \vee y$

x	y	f(x,y)		x	y	f(x,y)
0	0	0		0	0	1
0	1	1	0↔1 новый мир	0	1	0
1	0	1		1	0	0
1	1	1		1	1	0

проверим, что $(x \vee y)^* = xy$
по определению: $(x \vee y)^* = ((\overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}}\ \overline{\overline{y}} = xy$
Пример 2
$(x + y)^* = \overline{\overline{x} + \overline{y}} = 1 + (1 + x) + (1 + y) = 1 + x + y = x \Leftrightarrow y$
Замечание
$f^{**}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_n})} = \overline{\overline{\overline{f^*(\overline{\overline{x_1}}, \ldots \overline{\overline{x_n}}}}} = f(x_1, \ldots, x_n)$
то есть $f^{**} = f$
Следствие
$(x \cdot y)^* = x \vee y$
$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$
<u>Теорема о конъюнкции</u>
$f_0(f_1(x_1, \ldots, x_n), (f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$
$f_i : B^n \to B$
i=1...m
$f_0 : B^m \to B$
тогда
$f^*(x_1, \ldots, x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots, x_n)(f_2^*(x_1, \ldots, x_n) \ldots f_m^*(x_1, \ldots, x_n))$
<u>Докозательство</u>
$f^* = \overline{f(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}} \overset{\text{оп определению}}{=} \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n}) f_2(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n}) \ldots f_m(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n}} =$
$= f_0^*(\overline{f_1(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n})}, \overline{f_2(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n})} \ldots \overline{f_m(\overline{x_1}, \ldots \overline{x_n})}) =$
$f_0^*(f_1^*(x_1, \ldots x_n), f_2^*(x_1, \ldots x_n), \ldots, f_m^*(x_1, \ldots x_n)$
Следствие
Если есть $f(x_1, \ldots x_n)$или логическое выражение с $\vee, \cdot, \neg, +, \equiv$, то f^* такое же выражение, но связки заменены на двойственные
$\vee \leftrightarrow \cdot$
$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$
$\neg \leftrightarrow \neg$
Пример
$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y}z} \Leftrightarrow (x + y + z)$

$f^*(x,y,z) = \overline{x \cdot (\overline{y} \vee z} + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z$
$1^* = 0$
$0^* = 1$
Конъюктивно- нормальная форма- еще одна нормальная форма, похожа на ДНФ
<u>Определение</u>
Литерал- как раньше, переменная или отрицательная переменная: x,y,z,$\overline{x}$
Дизъюнкт- дизъюнкция литералов $x \vee y$
КНФ- это конъюнкция нескольких дизъюнктов$(x \vee y)(y \vee z)$
(Лекция за 17.03)
<u>Утвеждение</u>
у∀ логической функции есть КНФ, можно построить по таблице истинности
<u>Докозательство</u>
Заметим, что если вычислить (КНФ)* (двойственную КНФ), то получится ДНФ
Пример
$((x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y})(\overline{y} \vee \overline{z})^* = (xyz) \vee (x\overline{y}) \vee (\overline{yz})$
и наоборот (ДНФ)*=КНФ
итого, чтобы получить КНФ для функции f, надо построить ДНФ для f^*, ДНФ для f^*- существует
Пример
$f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

x y z	xy	f	f^*
0 0 0	0	1	0
0 0 1	0	0	1
0 1 0	0	1	1
0 1 1	0	0	0
1 0 0	0	1	1
1 0 1	0	0	0
1 1 0	1	0	1
1 1 1	1	1	0

f^*отрицание перевертнутого f
Вспомним определение
$f^*(x,y,z) = \overline{f(\overline{xyz}}$
$f^*(0,0,0) = \overline{f(1,1,1)}$
$f^*(0,0,1) = \overline{f(1,1,0)}$
$f^*(0,1,0) = \overline{f(1,0,1)}$
ДНФ для f^*
$\overline{xy}z$
$\overline{x}y\overline{z}$
$x\overline{yz}$
$xy\overline{z}$
$f^* = \overline{xy}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{yz} \vee xy\overline{z}$
по теореме о композиции
$f = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(x \vee y \vee \overline{z})$
Получение КНФ по таблице истинности без двойственной функции

$f(x,y,z) = xy \Leftrightarrow z$

x y z	f		
0 0 0	1		
0 0 1	0	$x \vee y \vee \overline{z}$	
0 1 0	1		
0 1 1	0	$x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$	1-отрицание 0- не отрицание
1 0 0	1		
1 0 1	0	$\overline{x} \vee y \vee \overline{z}$	
1 1 0	0	$\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$	
1 1 1	1		

Ответ:$f = (x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$

Итого, чтобы построить ДНФ- строки с 1 $\begin{array}{llll} 0 \leftrightarrow \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \\ 1 \leftrightarrow x & y & z \end{array}$

Чтобы получить КНФ строки с 0, $\begin{array}{llll} 0 \leftrightarrow x & y & z \\ 1 \leftrightarrow \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \end{array}$

Пример 2

x y	$x+y$	
0 0	0	$x \vee y$
0 1	1	
1 0	1	
1 1	0	$\overline{x} \vee \overline{y}$

Ответ:$(x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$

Замечание

Для функции записанной в форме КНФ, можно поставить задачу "выполнимости"

Вопрос: может ли значение быть=1?

-не известно решений, принципиально эффективней полного перебора значений переменных

Пример

$(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y})(y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{z}) = 1$

x=1 y=1 z=0

Многие задачи головоломки сводятся к задаче выполнимости

Пример

Принцип Дирихле

Если есть n клеток и в них n+1 заяц, то $\exists$ клетка, где зайцев $\geq$2

при n=2 x_{ij}-в клетке i=1 или 2, j=1 или 2 или 3 заяц

Попробуем записать, что в каждой клетке$\leq$ 1 заяц

1. каждый заяц ровно в одной клетке

$x_{11} + x_{21}$-заяц 1

$x_{12} + x_{22}$-заяц 2

$x_{13} + x_{23}$...

Если клеток $x_{1j}\overline{x_{2j}} \ldots \overline{x_{kj}} \vee \overline{x_{1j}} x_{2j} x_{3j} \ldots \overline{x_{ki}} \vee \overline{x_{1j}} \ldots x_{kj}$

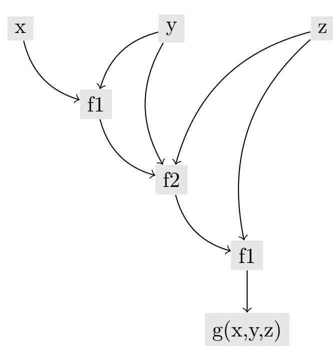
2. в каждой клетке не больше 1 зайца

кл\з	1	2	3
0	x_{11}	x_{12}	x_{13}
1	x_{21}	x_{22}	x_{23}

Если есть 2 зайца, то один из конъюнктов
$\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}} = 1$ в клетке 1≤1 зайца
$\overline{x_{11}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}}$ в клетке 2≤1 зайца
соединяем все утверждения
$(x_{11}+x_{21})(x_{12}+x_{22})(x_{13}+x_{23})(\overline{x_{11}x_{12} \vee x_{11}x_{13} \vee x_{12}x_{13}}) *$
$* (\overline{x_{11}x_{22} \vee x_{21}x_{23} \vee x_{22}x_{23}}) = 0$ всегда
$(x_{11} \vee x_{21})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{21}})(x_{12} \vee x_{22})(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{22}})*$
$(x_{13} \vee x_{23})(\overline{x_{13}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{12}})(\overline{x_{11}} \vee \overline{x_{13}})*$
$(\overline{x_{12}} \vee \overline{x_{13}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{22}})(\overline{x_{21}} \vee \overline{x_{23}})(\overline{x_{22}} \vee \overline{x_{23}})*$- КНФ
Берем программу, которая решает задачу выполнимости: она скажет- невыполнима

7 Классы замкнутости

Определение
Класс- это множество логических функций
Пример: K_2- класс функций от двух переменных: $f(x,y) = f(y,x)$
$f(x,y) = x \vee y \in K_1 \in K_2$
$g(x,y) = x \Rightarrow y \in K_1 \notin K_2$
K_3- класс функций $f(x_1,\dots) - f(0,\dots)$ функции, которые не зависят от первой переменной
$f(x,y,z) = y \Rightarrow z \in K_3$
$f(x,y,z) = \overline{x} \vee x \vee y \vee z \in K_3$
$K_4 : \{f(x,y) = x \vee y \quad g(x,y) = x \Rightarrow y\}$
Определение
• Замыкание класса
$K = \{f_1, f_2, \dots\}$
K^*-замыкание класса- это класс, состоящий из всех композиций функций из K



g(x,y,z)=
$f_1(f_2(f_1(x,y),y,z),z)$-композиция функций
Пример
1)$k = \{0, \overline{x}\}$
$k^* = \{f(0), g(f(0)), g(g(f(0))), \dots\}$
$k^* = \{\overline{x}, 0, 1, x\}$

2)$k=\{\overline{x}\}$
$k^*=\{\overline{x},x\}$
$k^*=\{g(x),g(g(x)),g(g(g(x))),\dots\}$
3)$k=\{\overline{x},x\vee y,xy\}$
$k^*=\{x,\dots\forall$функция$\}$
<u>Определение</u>
Если K-класс
$K^*=\alpha$(все логические функции), то K-полный
Вывод:$K=\{\overline{x},x\vee y,xy\}$-полный
Пример 4
$K=\{\overline{x},x\vee y\}$
$x\cdot y=\overline{\overline{x\cdot y}}=\overline{\overline{x}\vee\overline{y}}=f(g(f(x),f(y)))$
Значит K^*- тоже полный