Математическая логика и теория алгоритмов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей и Хаматов Вадим

Содержание

1 Математическая логика

1.1 Исчисление высказываний

1.1.1 Основные понятия

Определение. Логическая функция — это множество из 2 элементов. Также, логической функцией называют множество логических значений
$B = \{0, 1\}$, где 0 — это ложь (false), а 1 — это истина (true)

Определение. Логическая функция от n переменных

$$f : B^n \to B$$

Замечание. Часто логические функции вводят как перечисление возможных аргументов и значений функции при этих аргументах

Пример. Введем функцию $f(x, y)$

x	y	f(x,y)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 1: Таблица истинности для $f(x, y)$

Эту же функцию можно задать функцией $f(x, y) = max(x, y)$

x_1	x_2	...	x_n	f($x_1, x_2, \ldots, x_n$)
0	0	...	0	0 или 1
...	...	...	...	0 или 1
1	1	...	1	0 или 1

Таблица 2: Таблица истинности для $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Утверждение. *Функция от n переменных может быть* $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

При этом количество всех возможных наборов аргументов равняется 2^n*, а количество всех возможных функций при всех возможных наборах аргументов равняется* 2^{2^n}

Следствие. *Посчитаем количество таких функкий для разных n*

$n = 1 \quad 2^2 = 4$ *функций* $f(x)$

$n = 2 \quad 2^{2^2} = 16$ *функций* $f(x, y)$

$n = 3 \quad 2^{2^3} = 2^8 = 256$ *функций* $f(x, y, z)$

1.1.2 Функции от 1 переменной (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 1 переменной

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Данные функции имеют значение:

$f_1(x) = 0$ — функция 0

$f_2(x) = x$ — функция x

$f_3(x) = !x, \bar{x}, \neg x$, not x — функция отрицания (не x)

$f_4(x) = 1$ — функция 1

1.1.3 Функции от 2 переменных (их определения)

Пример. Перечислим все возможные функции от 2 переменных

Продолжение:

Перечислим основные значения функций:

$f_2(x, y)$ — это конъюнкция или "лочическое и"или логическое умножение $(xy, x\&y, x \wedge y)$

$f_7(x, y)$ — это исключающее или $(x+y, xXORy, x \oplus y)$, также данную функцию можно ассоциировать как $(x + y) mod 2$

x	y	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 3: Таблица истинности для $f(x, y)$

x	y	$f_9(x)$	$f_{10}(x)$	$f_{11}(x)$	$f_{12}(x)$	$f_{13}(x)$	$f_{14}(x)$	$f_{15}(x)$	$f_{16}(x)$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблица 4: Таблица истинности для $f(x, y)$

$f_8(x, y)$ — это логическое или, но ее можно также записать как $max(x, y)$ $(x|y, x \vee y)$

$f_{10}(x, y)$ — это эквивалентность $(x \Leftrightarrow y, x \equiv y, x == y)$

$f_{14}(x, y)$ — это импликация $(x \Rightarrow y, x \to y)$

Импликация работает так, что истина следует из чего угодно:

лешия не существует $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(1 \Rightarrow 1 = 1)$

допса скучная $\Rightarrow$ русалок не существует $= 1$ $(0 \Rightarrow 1 = 1)$

русалки существуют $\Rightarrow$ драконы существуют $= 1$ $(0 \Rightarrow 0 = 1)$

x $\Rightarrow$ y $= 0$ только если x $= 1$, а y $= 0$

$f_{12}(x, y)$ — это обратная импликация $(x \Leftarrow y = y \Rightarrow x)$

$f_9(x, y)$ — стрелка Пирса $(x \downarrow y = \overline{x \vee y})$

$f_{15}(x, y)$ — штрих Шеффера $(x|y = \overline{xy})$

$f_3(x, y)$ — запрет по y $(x > y = \overline{x \Rightarrow y})$

$f_1(x, y)$ — 0

$f_4(x, y)$ — x

$f_5(x, y)$ — запрет по x $(x < y = \overline{x \Leftarrow y})$

$f_6(x, y)$ — y

$f_{11}(x, y)$ — не y $(\neg y)$

$f_{13}(x, y)$ — не x $(\neg x)$

$f_{16}(x, y)$ — 1

Определение. Логические выражения — способ задания логических функций с помощью переменных, цифр 0 или 1 и операций:

$\cdot \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad + \quad \equiv \quad | \quad \downarrow \quad < \quad >$

Пример. Примеры логических выражений:

$(x \vee y) =$
$(x \Rightarrow yz) \vee (y \equiv z)$
$(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y)$

Определение. Значения логического выражения можно записать **Таблицей истинности**

Пример. $f(x, y, z) = (x \vee y)z$

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Замечание. Порядок строчек в таблеце истинности может быть любым, но лучше использовать как у двоичных чисел

Утверждение. *Таблицы истинности часто считают постепенно*

x	y	z	$x \vee y$	$(x \vee y)z$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

1.1.4 Приоритеты операций

$$\neg$$

$$\cdot$$

$$\vee$$

$$+ \quad \equiv$$

$$\Rightarrow \quad \Leftarrow$$

$$| \quad \downarrow \quad < \quad >$$

Пример. Примеры приоритетов операций:
$\neg x \vee y = (\neg x) \vee y$
$x \vee yz = x \vee (yz)$
$x \Rightarrow y \vee z = x \Rightarrow (y \vee z)$

1.1.5 Алгебраические преобразования логических выражений

Определение. Алгебраические преобразования логических выражений — изменяем выражения по правилам, обычно в сторону упрощения

Пример. $(0 \Rightarrow x) \vee (1 \Rightarrow y) = 1 \vee (1 \Rightarrow y) = 1$

Утверждение 1.

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Доказательство:

x	$\overline{x}$	$\overline{\overline{x}}$
0	1	0
1	0	1

Утверждение 2. *При* $\vee$*:*

$$1 \vee x = 1$$

$$0 \vee x = x$$

$$x \vee y = y \vee x$$

1.1.6 Таблица эквивалентных логических выражений

Утверждение. $x \vee y = y \vee x$ - *симметричность*
$x \vee 0 = x$
$x \vee 1 = 1$
$x \vee x = x$
$x \vee \overline{x} = 1$
Доказательство:
$xy = yx$
$x * 0 = 0$
$x * 1 = x$
$x * x = x$

x	$\overline{x}$	$x \vee \overline{x}$
0	1	$0 \vee 1 = 1$
1	0	$1 \vee 0 = 1$

$x * \overline{x} = 0$
$x + y = y + x$
$x + 0 = x$
$x + 1 = \overline{x}$
$x + x = 0$
$x + \overline{x} = 1$

Утверждение. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ - *ассоциативность*
Ассоциативность означает,что порядок скобок не важен

Пример. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$ - не симметричная функция

Доказательство:

x y	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow x$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Замечание. $x \Rightarrow y \neq y \Rightarrow x$

$x \Rightarrow 0 = \overline{x}$
$0 \Rightarrow x = 1$

Доказательство:

x	$x \Rightarrow 0$
0	$0 \Rightarrow 0 = 1$
1	$1 \Rightarrow 0 = 0$

$x \Rightarrow 1 = 1$
$1 \Rightarrow x = x$
$x \Rightarrow x = 1$
$x \Rightarrow \overline{x} = \overline{x}$

x y z	$x \Rightarrow y$	$y \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	1	0	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1

$\overline{x} \Rightarrow x = x$
$\overline{x} \Rightarrow y \Rightarrow z$ *договоримся, что это* $x \Rightarrow y(y \Rightarrow z) \neq (x \Rightarrow y) \Rightarrow z$
$x \Leftrightarrow y = y \Leftrightarrow x$
$x \Leftrightarrow 0 = \overline{x}$
$x \Leftrightarrow 1 = x$
$x \Leftrightarrow x = 1$
$x \Leftrightarrow \overline{x} = 0$
$x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z) = (x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$ *- ассоциативно*

Утверждение. *Дистрибутивность*
$(x \vee y)z = xz \vee yz$
$(x + y)z = xz + yz$ *по таблице истинности*
$(x\&y) \vee z$ $(xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$
$(x \vee y)\&z = (x\&z) \vee (y\&z)$
$(x\&y) \vee z = (x \vee z)\&(y \vee z)$

Замечание. $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(y_1 \vee y_2) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_1 \vee (x_1 \vee x_2 \vee x_3)y_2 = x_1y_1 \vee x_2y_1 \vee x_3y_1 \vee x_1y_2 \vee x_2y_2 \vee x_3y_2$

$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z) = xy \vee xz \vee zy \vee zz = xy \vee xz \vee zy \vee z = xy \vee xz \vee zy \vee z * 1 = xy \vee z(x \vee y \vee 1) = xy \vee z$ сошлось

$x + y = \overline{x \Rightarrow} y$ *- смотри Таблицу истинности*
$(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = x \Rightarrow y$

1.1.7 Многочлены Жегалкина

Замечание. Одну и ту же функцию можно записать по разному.

В алгебре: $f(x) = 1 + x = x + 1 = x + 5 - 4 = sin(x - x) + x = ...$

В логике: $f(x, y) = x \vee y = x \vee y \vee 0 = (x \vee y)(\overline{y} \vee y = x\overline{y} \vee y$ *(= - дистрибутивность)*

Многочлены Жегалкина для логической формулы

Определение. $f(x_1......x_n)$ - это многочлен с переменными xi, конспектами 0,1 и со степенями переменных $\leqslant 1$. Это многочлены от xi $\mathbf{Z_2}$

Пример. $f(x, y, z) = 1 + x + yz + xyz$

$1 + x$ $\qquad$ $xy + xyz$

$1 + xy$

Не многочлены

$1 + x + (y \vee z)$

$1 + x + z^2$ *нельзя степень 2*

Замечание. В общем случае многочлен от 1 переменной ($_i = 0$ или 1)

$a_0 + a_1x$

от 2ух: $a_0 + a_1x + a2y + a3xy$

от 3ех: $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$

В общем случае $f(x1....x_n)$ $a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + ax_1x_2 + ax_1x_3$ + ... *(все пары переменных)* + $ax_1x_2x_3 + ax_1x_3x_2$ $\leftarrow$*все тройки перменных*+$ax_1x_2x_3...x_n$

Определение. $\forall f(x_1...x_n)$ - логические функция $\exists!$ многочлен Жегалкина $g(x_1...x_n) : f = g$

Замечание. Всего 4 функции от 1ой переменной

$f(x) = 0 = \overline{x} = 0 + 0x$

$f(x) = 1 = 1 = 1 + 0x$

$f(x) = x = x = 0 + 1x$

$f(x) = \overline{x} = 1 + x = 1 + 1x$

Докозательство:

Определение. Разные многочлены - это разные логические функции т.е. $f(x_1...x_n = a_0 + ... + a_1x_1...x_n$

$g(x_1...x_n) = b_0 + ... + bx_1...x_n$

$\exists! : a_i \neq b_i$ различающийся

Доказательство:

Возьмем индекс с самым большик количеством переменных

$f(x, y, z) = 1 + x + xy + xyz = ... + 1x + Dy + Dz + 1xy$

$g(x, y, z) = 1 + y + z + xyz... + Dx + 1y + 1z$

для переменных этого слагаемого подставим 1 0xy

для остальных переменных : 0

[В примере $x = 1, y = 0, z = 0 : f(1, 0, 0)g(1, 0, 0)$ *]*

и в f и в g все другие слагаемые равны 0

Теперь f(...) и g(...)

$f(...) = a_i x1x_2x_3 \neq b_i x_1x_2x_3 \Rightarrow f(x_1...x_n) \neq y$

Доказательство:

Проверим, что многочленов Жегалкина столько, сколько функций:

Посчитаем

$a_0 + a_1x_1 + ... + a_1x_1x_2...x_n$

Сколько слагаемых:

1) 1 слагаемых без переменных

n слагаемых с переменной

$a_1x_1 + ... + a_nx_n$

C_n^2 *- слагаемых с 2 - мя переменными*

${}_n^3$ *- слагаемых с 3 - мя переменными*

C_n^n *- слагаемых с n переменными*

Всего : $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ...C_n^n = 2^n((1+1)^2)$

Пример. $a_0 + a_1x$ - 2 слагаемых

$a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy - 2^2 = 4$ слагаемых

2) Все слагаемых имею вид: $x_1, x_2, x_3...x_n$ (0 или 1) - 2^n слагаемых

Итого: многочлен Жегалкина от n переменных

Задача. Сколько разных многочленов?

Это столько же, сколько логический функций

Итог:

Следствие: Любая логическая функция может быть представлена в виде многочлена Жегалкина

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

$f(x, y) = x * y$ - уже многочлен Жегалкина

Метод неопределенных коэффициентов:

Подберем $x \vee y = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$

$f(0, 0) = 0$

$f(0, 0) = a_0 + a_1 * 0 + a_2 * 0 + a_3...$

$f(1, 0) = 1 \vee 0 = 1$

$f(1, 0) = a_0 + a_1 = a_1$ $(a_0 = 0, \Rightarrow a_1 = 1$

$f(0, 1) =$ аналогично $\Rightarrow a_1 = 1$

$f(x, y) = x + y + a_3xy$

$f(1, 1) = 1 \vee 1 = 1$

$f(1, 1) = 1 + 1 + a_3 = 0 + a_3 = a_3,\ a_3 = 1$

Ответ: $x \vee y = x + y + xy$

Многочлены Жегалкина от 1 переменной:

Многочлены Жегалкина от 2 переменных:

Формулы:

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
x	x
$\bar{x}$	$1+x$

$f(x)$	Мн Ж
0	0
1	1
xy	xy
$x+y$	$x+y$
$x \vee y$	$x+y+xy$

1. $\overline{xy} = \neg(xy) = \overline{x} \vee \overline{y}$
2. $\overline{x \vee y} = \neg(x \vee y) = \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$

Замечание. $\overline{xy} \neq \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x}\,\overline{y}$

Докзательство формул через таблицу истинности:

x	y	$\overline{x \vee y}$	$\overline{x} \cdot \overline{y}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

1.1.8 Получение многочлена Жегалкина через алгебраические упрощения

1. **Многочлен Жегалкина для $\vee$**

   $x \vee y = (x = \overline{a}, y = \overline{y}) = \overline{ab} = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{(1+x)(1+y)} = 1 + (1+x)(1+y) = 1+1+x+y+xy = \underline{x+y+xy}$

2. **Многочлен Жегалкина для $\Leftrightarrow$**

   $x \Leftrightarrow y = \overline{x+y} = \underline{1+x+y}$

3. **Многочлен Жегалкина для $\Rightarrow$**

   $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = (1+x) \vee y = (1+x)+y+(1+x)y = 1+x+y+y+xy = \underline{1+x+xy}$

Замечание. Если есть логическая формула, то ее можно приветси к форме многочлена Жегалкина двумя способами:

1. метод неопределенных коэффициентов:

   $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + \ldots + axyz$

2. метод алгебраических преобразований

Пример. $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \ldots = x + y + xy$

Пример. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y = \ldots = 1 + x + xy$

Пример. $x \Rightarrow (y \vee \overline{z}) = x \Rightarrow (y + \overline{z} + y \cdot \overline{z}) = x \Rightarrow (y + (1 + z) + y \cdot (1 + z)) = x \Rightarrow (y + 1 + z + y + yz) = x \Rightarrow (1 + z + yz) = 1 + x + x(1 + z + yz) = 1 + x + x + xz + xyz = 1 + xz + xyz$

Поймем, что: $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z = x \Leftrightarrow (y \Leftrightarrow z)$
$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z = (1+x+y) \Leftrightarrow z = 1+(1+x+y)+z = 1+1+x+y+z = x+y+z$
Вывод:
Заранее не ясно, сложно ли привести логическую формулу к многочлену Жегалкина

1.1.9 Дизъюнктивно-нормальная форма (ДНФ)

Определение. Литерал — это переменная или отрицание переменной

Пример. $x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$

Определение. Конъюнктор — конъюнкция литералов

Пример. $x\overline{y}, xyz, \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}, \overline{x}z$, ноль (пустой конъюнкт).

Определение. Логическое выражение имеет ДНФ, если она является дизъюнкцией конъюнкторов

Пример. $x\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee z \vee \overline{x}\,\overline{y}$ — ДНФ

Пример. $xy \vee \overline{x}\,\overline{y}$ — ДНФ

Пример. $x \vee y$ — ДНФ

Пример. xy — ДНФ

Пример. не ДНФ — $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$ — ДНФ

Пример. не ДНФ — $x \Rightarrow yz = \overline{x} \vee yz$ — ДНФ

x	y	z	$f(x,y,z)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$
0	1	1	1	$\overline{x}\,yz$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	1	$xy\,\overline{z}$
1	1	1	0	

Построение ДНФ по таблице истинности функции:

алгоритм на примере трех переменных

Берем строки из столбца $f(x,y,z)$, где значения в столбце равны 1

Допустим есть строка: $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ (a могут быть как 0, так и 1)

В ответ добавляется конъюнкт xyz ($0 \Rightarrow$ отрицание, $1 \Rightarrow$ не отрицание)

Ответ: $f(x,y,z) = \overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}$

Доказательство корректности алгоритма:

Когда полученный ДНФ = 1?

Когда есть конъюнкт равный 1

1. Если первый конъюнкт равняется 1 (в примере $\overline{x}\,y\,\overline{z} = 1$)

   $\Rightarrow$ все литералы конъюнкта равняются 1

   $\Rightarrow$ в примере $\overline{x} = 1 \quad y = 1 \quad \overline{z} = 1$

   $$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 0$$

2. Если второй конъюнкт равняется 1

   $\Rightarrow$ в примере $x = 0 \quad y = 1 \quad z = 1$ — строка из таблицы истинности

3. То же самое с третьим конъюнктом

Посмотрим таблицу с этими конъюнктами:

Замечание. У одной функции могут быть разные ДНФ

Пример. $\underline{\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}} = \overline{x}\,y(\overline{z} \vee z) \vee xy\,\overline{z} = \underline{\overline{x}\,y \vee xy\,\overline{z}}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

Пример. $\underline{\overline{x}\,y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee xy\,\overline{z}} = \overline{z}\,y(\overline{x} \vee x) \vee zy\,\overline{x} = \underline{\overline{z}\,y \vee zy\,\overline{x}} = \underline{y\,\overline{z} \vee \overline{x}\,yz \vee \overline{x}\,x \vee z\,\overline{z}}$ — подчеркнутые выражения являются ДНФ

x	y	z	$\overline{x}\,y\,\overline{z}$	$\overline{x}\,yz$	$xy\,\overline{z}$	$f(x,y,z)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Получить ДНФ для логической функции/формулы можно:

1. по таблице истинности
2. с помощью алгебраических преобразований

Пример. 1. $\overline{x} = \overline{x}$

2. $x \vee y = x \vee y$
3. $x \cdot y = x \cdot y$
4. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$
5. $x \Leftrightarrow y = (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) = (\overline{x} \vee y)(\overline{y} \vee x) = \overline{x}\overline{y} \vee \overline{x}x \vee y\overline{y} \vee yx = \overline{x}\overline{y} \vee xy$

x	y	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. $x + y = \overline{x \Leftrightarrow y} = \overline{\overline{x}\,\overline{y} \vee xy} \ldots$
   $= \overline{\overline{x}\,y} \vee \overline{x \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}} \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{\overline{y}} = x\,\overline{y} \vee \overline{x}\,y$
7. $x \Rightarrow (y + z) = \overline{x} \vee (y + z) = \overline{x} \vee \overline{y}\,z \vee y\,\overline{z}$

1.1.10 Задача (не) выполнимости

Дана логическая формала в ДНФ

Проверить, бывает ли она равна 0?

$\overline{x}\,\overline{y} \vee x \vee y ? = 0$

$x = 0, y = 0 \Rightarrow \overline{x}\,\overline{y} = 1$
$\Rightarrow$ данный ДНФ не может быть равным 0
Эта задача обладает особенностью:

1. если знать значения переменных (ответ), то их легко можно быстро проверить

2. подобрать значения переменных для 0 — нет

Нет известного алгоритма, который "принципиально"быстрее полного перебора
У этой задачи класс NP выполнимости (ответ легко проверить, а найти его простым способом невозможно)

Следствие. *То к чему сводится задача (не) выполнимости тоже сложна*

1. *упростить логическое выражение*

2. *поиск минимального ДНФ*

1.1.11 Запись таблиц истинности в виде графика

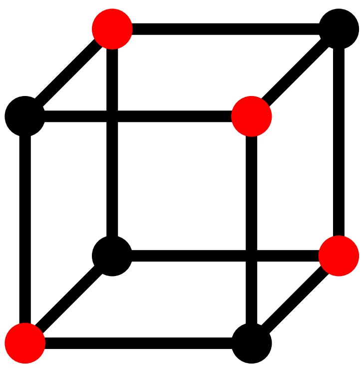
Формула = $f(x, y, z) = x + y$

$$f(0,0) = 0$$

$$f(0,1) = 1$$

$$f(1,0) = 1$$

$$f(1,1) = 0$$



1.1.12 Задача минимизации ДНФ

Данная задача тоже является сложной, также как и задача (не) выполнимости

Дана логическая функция (в виде ДНФ). Необходимо найти самую короткую ДНФ эквивалентную данной.

Минимальной ДНФ считается та, где меньше количество литералов и дизъюнкций

Пример. $\overline{x}\,\overline{y} \vee z$ короче, чем $xy \vee yz$

Замечание. Далее рассматриваться все будет для функции от 3 переменных $f(x, y, z)$

Замечание. Какова таблица истинности $xyz = abc$, где $a = 0$ или $1, b = 0$ и $1, c = 0$ или 1

$0 \Rightarrow$ надо поставить отрицание

$1 \Rightarrow$ нет отрицания

Пример. $f(x, y, z) = \overline{x}\, y\, \overline{z}$

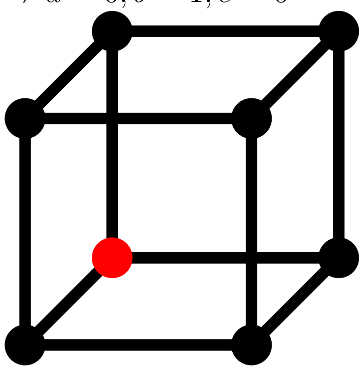
Если $\overline{x}\, y\, \overline{z} = 1$

$\Rightarrow \overline{x} = 1, y = 1, \overline{z} = 1$

$\Rightarrow x = 0, y = 1, z = 0$

$\Rightarrow x = a, y = b, z = c$

$\Rightarrow a = 0, b = 1, c = 0$



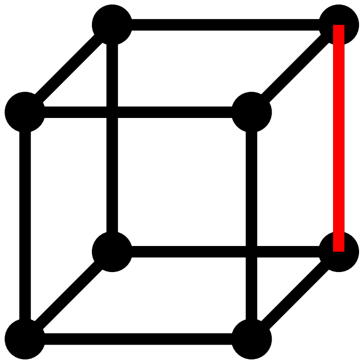
Пример. $f(x, y, z) = xy$

Если $xy = 1$

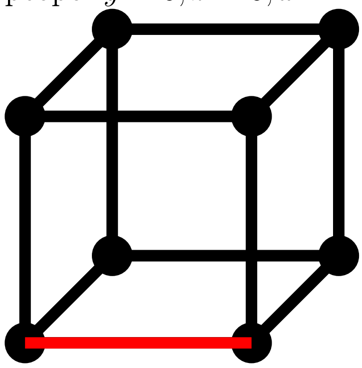
$\Rightarrow x = 1, y = 1$

$\Rightarrow x = a, y = b$

$\Rightarrow a = 1, b = 1$

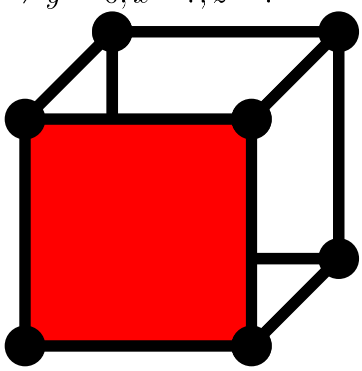


Аналогично, $f(x,y,z) = \overline{y}\,\overline{z}$
ребро: $y=0, z=0, x=?$ — не важно

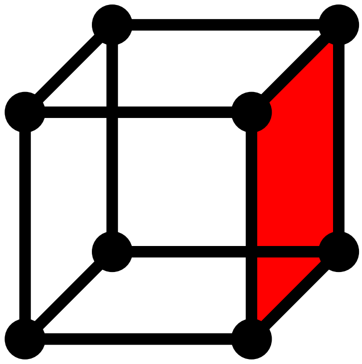


Последнее — конъюнкт из 1 литерала:
$x, \overline{x}, y, \overline{y}, z, \overline{z}$

Пример. $f(x,y,z) = \overline{y}$
Если $\overline{y} = 1$
$\Rightarrow y = 0, x = ?, z = ?$



Или конъюнкт x, грань $x = 1$



Итого:

xyz — это вершина $x = a, y = b, z = c$

xy — это ребро $x = a, y = b$

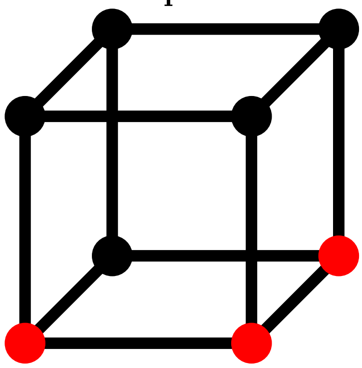
x — это грань $x = a$

Попробуем минимизировать ДНФ

Пример. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z}$

Найти самый короткий ДНФ для данного выражения

Шаг 1: строим ТИ



$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = (0,0,0)$

$x\,\overline{y}\,\overline{z} = (1,0,0)$

$xy\,\overline{z} = (1,1,0)$

Шаг 2: упрощаем

Чтобы упростить имеет смысл рассмотреть 2 ребра:

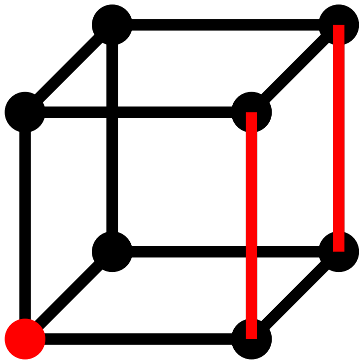
$(0,0,0) - -(1,0,0) = \overline{y}\,\overline{z}$

$(1,0,0) - -(1,1,0) = x\,\overline{z}$

$\Rightarrow$ ДНФ $= \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z} = xy\,\overline{z} \vee \overline{y}\,\overline{z}$

$\Rightarrow$ самое короткое ДНФ $= \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z}$

Пример. $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y} \vee xy$



$\Rightarrow$ ДНФ $= x \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = x \vee \overline{y}\,\overline{z}$

Замечание. Данный метод позволяет наглядно перебрать все ДНФ и найти минимальный

С помощью алгебраических преобразований мы не сможем понять, что ответ самый оптимальный

Пример. Алгебраические преобразования

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z} = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xy\,\overline{z} = \overline{y}\,\overline{z} \vee x\,\overline{z}$

Но тут непонятно, а вдруг можно сделать еще короче

1.1.13 Двойственная функция

Пусть есть логическая функция: $f = B^n \to B = \{0, 1\}$

Двойственная функция: $f^* = B^n \to B = \{0, 1\}$

$f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$

Замечание. Мир замены лжи на истину

$$0 \leftrightarrow 1$$

Пример. $f(x, y) = x \vee y$

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Новый мир: $1 \to 0, 0 \to 1$

Получилось, что $(x \vee y)^* = xy$

Пример. $(x \vee y)^* = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}} = \overline{\overline{x}}\,\overline{\overline{y}} = xy$

x	y	f^*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Пример. $(x+y)^* = \overline{\overline{x}+\overline{y}} = \overline{1+x+1+y} = 1+x+1+y+1 = 1+x+y = x \Leftrightarrow y$

Замечание. $f^{**}(x_1, x_2 \dots x_n) = \overline{f^*(\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_n})} = \overline{\overline{f(x_1, x_2 \dots x_n)}} = f(x_1, x_2 \dots x_n)$

Следствие.

$$(xy)^* = x \vee y$$

$$(x \Leftrightarrow y)^* = x + y$$

Теорема о композиции:
$f = f_0(f_1(x_1, \dots x_n), f_2(x_1, \dots x_n), \dots f_m(x_1, \dots x_n))$
f_i — это функции от n переменных $(B^n \to B)(i = 1 \dots n)$
$f_0 = B^m \to B$
Тогда $f^*(x_1, \dots x_n) = f_0^*(f_1^*(x_1, \dots x_n), f_2^*(x_1, \dots x_n), \dots f_m^*(x_1, \dots x_n))$
Доказательство:
$f^* = \overline{f(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})} = \overline{f_0(f_1(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}), f_2(\overline{x_1, \dots \overline{x_n}}) \dots f_m(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n}))} = f_0^*(\overline{f_1(\overline{x_1, \dots \overline{x_n}})}, \overline{f_2(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})}, \dots \overline{f_m(\overline{x_1}, \dots \overline{x_n})})$

Следствие. *Если есть $f(x_1, \dots x_n)$ — записано, как логическое выражение с $\cdot$, $\vee$, $\neg$, $+$, $\Leftrightarrow$, то f^* — также выражение, но связки заменяются на двойственные узлы*

$$\vee \leftrightarrow *$$

$$+ \leftrightarrow \Leftrightarrow$$

$$\neg \leftrightarrow \neg$$

так как $(\overline{x})^* = \overline{x}$

Пример.

$$f(x, y, z) = \overline{x \vee \overline{y}\, z} \Leftrightarrow (x + y + z)$$

$$f^*(x, y, z) = (\overline{x \cdot (\overline{y}\, z)}) + (x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z)$$

Пример.

$$f(x_1, \dots x_n) = 1$$

$$\Rightarrow f^*(x_1, \dots x_n) = \overline{1} = 0$$

$$1^* = 0; 0^* = 1$$

1.1.14 Конъюнктивно-нормальная форма (КНФ)

Определение. Конъюнктивно-нормальная форма — еще одна нормальная форма, похожая на ДНФ

Определение. Литерал — это как и раньше, переменные или отрицательные переменные

$$x, y, \overline{x}, \ \overline{y}$$

Определение. Дизъюнкт — дизъюнкция литералов

$$x \vee y; \ x \vee y \vee \overline{z}; \ x \vee \overline{z}; \ \overline{x}$$

$$\cancel{xy}, \cancel{x \vee yz}$$

Определение. КНФ — это конъюнкция нескольких дизъюнктов

$$(x \vee y)(y \vee \overline{z});$$

$$(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x})$$

$$\cancel{xy \vee z}$$

$$x \vee y \vee z$$

— 1 дизъюнкт

$$xyz$$

— 3 дизъюнкта