Лекция 9

0371 Кузнецова Елизавета

9 November 2021

Алгоритм Форда-Беллмана

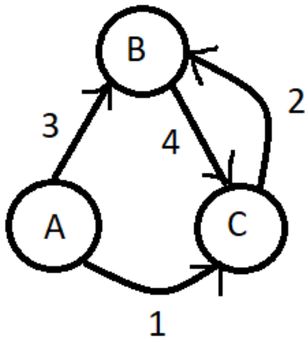

Рис. 1:

A: 3B, 1C
B: 4C
C: 2B
Пути из A
Сначала d:

A	B	C
0	∞	∞
0	3	∞
0	3	∞
0	2	1

Релаксация
$A \to B$
$0+3 < \infty$
$A \to C$
$0+1 < \infty$
$B \to C$
$3+4 < 1$
$C \to B$
$1+1 < 3$
$n=3 \Rightarrow n\text{-}1= 2$ цикл
AB,AC,BC,CB - нет улучшений
Ответ:
A B C
0 2 1

Корректность алгоритма

Теорема 1. *В конце массив d содержит расстояние от A*

Доказательство. После i-го цикла релаксации всех ребер d хранит числа d(x) $\leq$ min длин путей, в которых $\leq$ i ребер

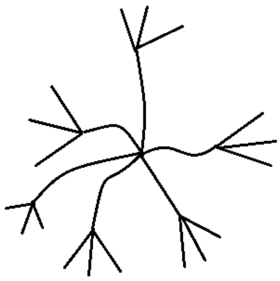

Рис. 2:

Действительно

Б   i=0

min (пути из нуля ребер)

только A-A d(A)=0 d(u)=+∞

Пусть есть оптимальный путь из i+1 ребра

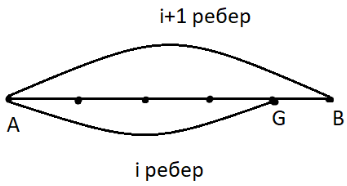

Рис. 3:

По предположению d(C)=d(B)+d(A,C)

Длина пути A-C-B = dist (C) + вес (CB)

d(C)=dist(C)

Проверка

d(C)+вес(CB) $\leq$ d(B) - верно, т.к путь оптимален $\Rightarrow$ d(B) = d(C)+вес(CB)

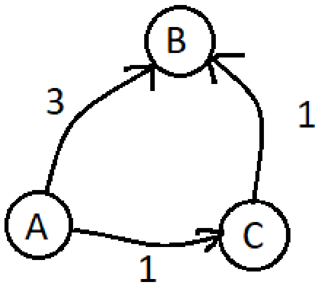

Рис. 4:

Почему n-1 этап ?
Оптимальный путь не содержит циклы

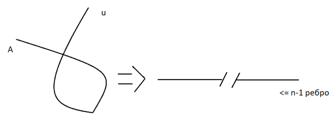

Рис. 5: n-1 ребро

□

Замечание:
Мы вычисляели только расстояния, но путь неизвестен. Как восстанавливать путь?
Будем сохранять информацию об успешных релаксациях
Prev - массив вершин
Если релаксация u——v успешна, то Prev[v]=u (опт. путь в v лежит через u)

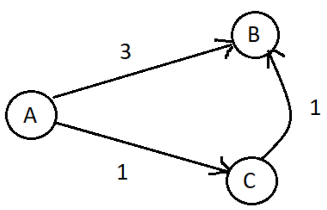

Рис. 6:

	A	B	C
d	0	∞	∞
AB	0	3/A	∞
AC	0	3/A	1/A
CB	0	2/C	1/A

Восстановить путь в B

A $\to$ C $\to$ B

prev(C) prev(B)

В общем случае путь A $\to$ v это prev(prev(v)) $\to$ prev(u) $\to$ v

Алгоритм Дейкстры

В отличие от ФБ требует, чтобы веса w(e) $\geqslant$ 0

Алгоритм

Дан граф G=(V,E), A $\in$ V найти расстояния до всех вершин d(u)=dist(A,u)

Алгоритм

d(A)=0

d(u $\neq$ A)=+∞

for v $\in$ V (по всем вершинам)

Повторяй n раз (n=V) обработанные вершины

Выбрать u $\in$ V / P, где d(u) $\to$ min (из необработанных min d)

for ee ребра из u, e=(u,v)

релаксируем ребро e

P=P $\cup$ {u}

Пример:

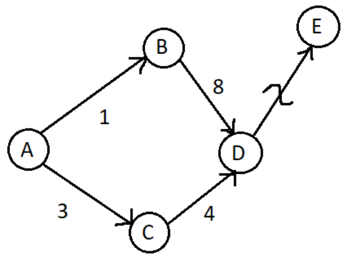

Рис. 7:

A B C D E
d 0 ∞ ∞ ∞ ∞ P={Ø}
1 3 ∞ ∞ P={A}
3 9 ∞ P={AB}
7 ∞ P={ABC}
9
P={ABCD}

Рис. 8:

u=A
P=A
A → B
0 1 +∞
A → C
0 3 +∞
u=B
B → D
1 8 +∞
u=C
C → D
3 4 9

Эффективность

|V| x |E| x log|V| (выбор min)

Корректность

Идея. На каждом шаге d(u)=min путей

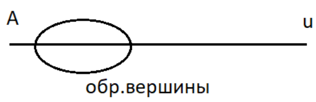

Рис. 9:

База
Шаг=0
d(A)=0 d(u)=∞
Переход

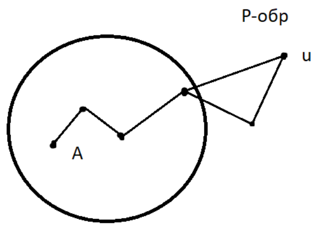

Рис. 10:

Выбрали u=min вершина из V/ {P}
Пусть есть оптимальный путь в u   A – – $\overline{u}$—— ——u
dist ($\overline{u}$) = dist (u)-x   обр   x
по предположению
dist ($\overline{u}$) = d ($\overline{u}$)
dist (u) $\Rightarrow$ d (u) $>$ d ($\overline{u}$)
d(u) $\Rightarrow$?? d(u) был min

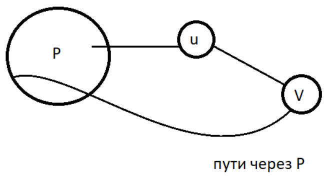

Рис. 11:

Оптимальный путь в V идет через u
dist(A,u)+вес(u,v)=dist(A,v)
$\Rightarrow$ релаксация u $\to$ v успешна и d(v) получит расстояние.
Для восстановления пути нужен аналогичный Prev
успешная релаксация u——v
Prev[v]=u

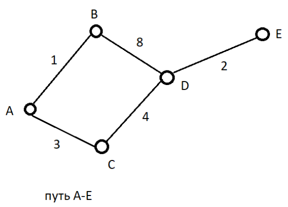

Рис. 12:

A	B	C	D	E
0	∞	∞	∞	∞
	1/A	3/A	∞	∞
		3/A	9/B	∞
			7/C	∞
				9/B

A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ D $\rightarrow$ E

prev(C) prev(D) prev(E)