Лекция 5

Elizaveta Kuznetsova

05 October 2021

Напоминание

Опредление 1. *Дерево - свзяный граф без циклов* $|E|+1=|V|$

Рис. 1: Дерево

Полный граф - любые пары разных вершин соединены $\forall u \neq u \in V$

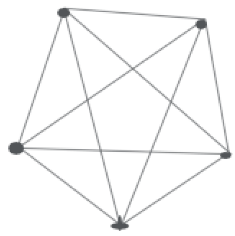

Рис. 2: Полный граф

Если вершин n $|V|=n$, то ребер:

1. C_n^2 ребер выбираем пары $\frac{n(n-1)}{2}$
2. степени всех вершин $n-1$

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

$\Rightarrow n-1=2|E|$

Планарные графы

Опредление 2. *Граф G - планарный, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались*

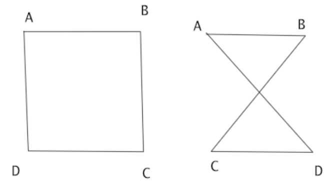

Рис. 3: Планарный граф

Теорема 1 (Формула Эйлера)**.** *Если планарный граф $G = (V, E)$ нарисован на плоскости, у него можно посчитать грани*
Пусть граней - f, $|V| = n$, $|E| = m$

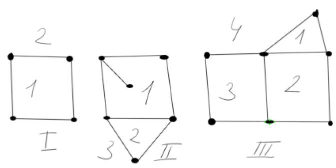

Рис. 4:

Тогда $n - m + f = 2$
I $4 - 4 + 2 = 2$
II $6 - 7 + 3 = 2$
III $7 - 9 + 4 = 2$

Доказательство. Индукция по количеству ребер
База: G - дерево

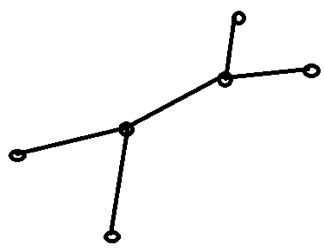

Рис. 5: У дерева 1 грань

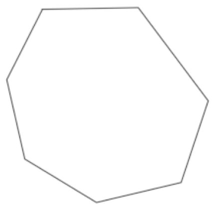

Рис. 6: Вокруг грани всегда есть цикл. Дерево без циклов

$n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2$
Переход: G, G' - связные планарные графы. Для G не знаем, верно ли. Для G': если у G' меньше ребер $\Rightarrow$ верно.
G - не дерево $\Rightarrow$ есть цикл. Берем любое ребро цикла, вокруг него 2 грани. Удалим ребро, получим G', который тоже связен и планарен.
$n' = n$, $m' = m - 1$, $f' = f - 1$
По индукции предполагаем: $n' - m' + f' = 2$
$\Rightarrow n - (m-1) + (f-1) = 2$
$\Rightarrow n - m + f = 2$ $\square$

Следствие:

1. Неважно. как рисовать планарный граф, количество граней постоянно

2. Теорема работает для многогранника

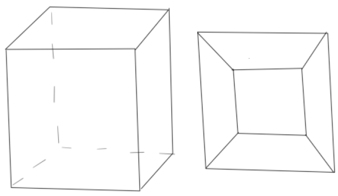

Рис. 7: Теорема Эйлера для куба

8-12+6=2

3. Если G - планарен (не обязательно связен)
n-m+f=1+|Количество компонент связности|

4. У каждой грани вокруг ≥ 3 ребра

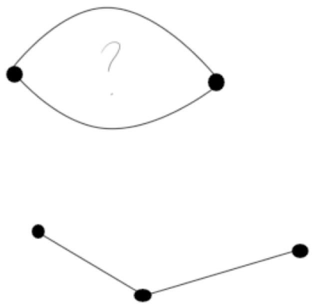

Рис. 8:

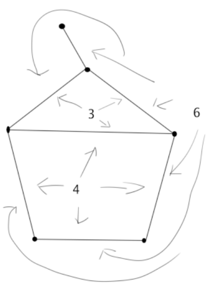

Рис. 9: Количество ребер вокруг грани

$3f \leq \sum_g$количество ребер вокруг g $\leq 2m$
$\Rightarrow 3f \leq 2m$
Но $n - m + f \leq 2$
$3n - 3m + 3f \leq 6$
$3n - 3m + 2m \geq 6 \Rightarrow 3n - m \geq 6$
$\Rightarrow m \leq 3n - 6$ в связном планарном графе.
Следствие: Полный граф при $n = 5$ не планарен.

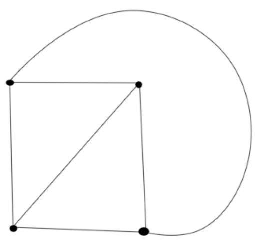

Рис. 10: Планарный полный граф n=4

Доказательство. K_5 - полный граф $n = 5, m = \frac{5*4}{2} = 10$
$10 \leq 3 * 5 - 6 = 9$- неверно

$\square$

Утверждение:Граф $K_{3,3}$ тоже не планарен

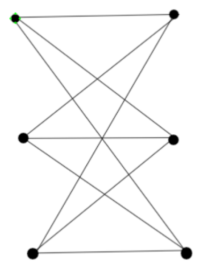

Рис. 11: Граф $K_{3,3}$

Доказательство. $n = 6$, $m = 9$, $9 \leq 3 * 6 - 6$ - не противоречит
Сколько граней, если планарен? $6 - 9 + f = 2 \Rightarrow f = 5$
В $K_{3,3}$ все циклы четные (ходим лево-право или право-лево)
$\Rightarrow$ у грани ≥ 4 ребра.
$4f \leq \sum$ ребер у грани $\leq 2m$
$\Rightarrow m \geq 2f$, но $9 \not\geq 2 * 5$

$\square$

Теорема 2 (Теорема Понтрягина-Кудряковского)**.** *Граф G - планарен, если он не содержит подграфов, стягивающихся к K_5 и $K_{3,3}$*

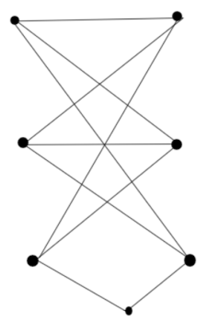

Рис. 12: Не планарен. Стягивается к $K_{3,3}$

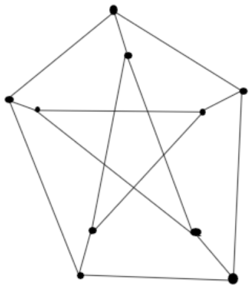

Рис. 13: Не планарен. Содержит K_5. Граф $K_{3,3}$ тоже есть

Хроматизм

Опредление 3. *Пусть $G = (V, E)$ - граф. Раскраска графа G в k цветов - это функция c: $V \to \{1, ..., k\}$*

Причем, если есть ребро (U, V), то $c(U) \neq c(V)$

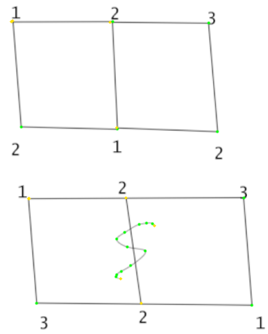

Рис. 14: 1 - раскраска. 2 - не раскраска

Какие графы можно раскрасить в 1 цвет?

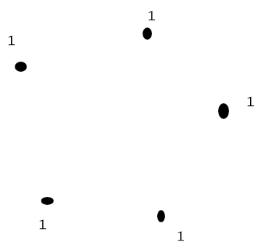

Рис. 15: Граф без ребер

Какие графы можно раскрасить в 2 цвета?

Опредление 4. *Граф G - двудольный, если его можно раскрасить в 2 цвета*

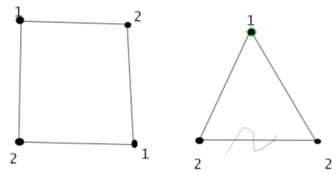

Рис. 16: 1 - двудольный 2 - не двудольный

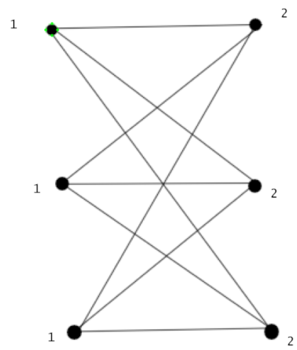

Рис. 17: $K_{3,3}$ - двудольный

Замечание Двудольные графы часто рисуют из двух частей(долей)

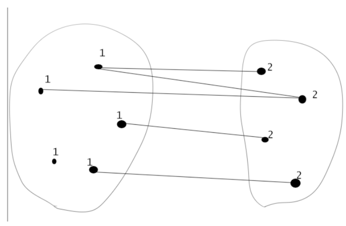

Рис. 18: $K_{3,3}$ - двудольный

G - двудолен $\Leftrightarrow$ все циклы имеют четную длину

Доказательство. 1. Двудолен ⇒ все циклы четные

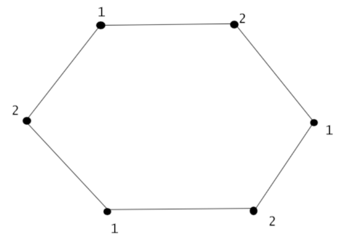

Рис. 19: В цикле поровну цветов 1 и 2

2. Все циклы четные ⇒ двудолен.
"Подвесим"граф за вершину.

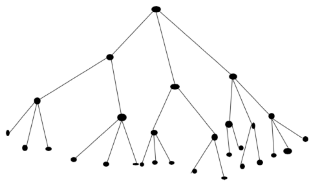

Рис. 20: Назначаем цвета по уровням

Почему обратные ребра не учитываем?

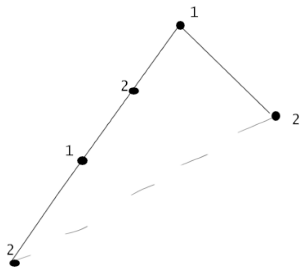

Рис. 21:

Иначе будет нечетный цикл, а у нас четный □