Лекция 4

0371 Кузнецова Елизавета

28 September 2021

Степени

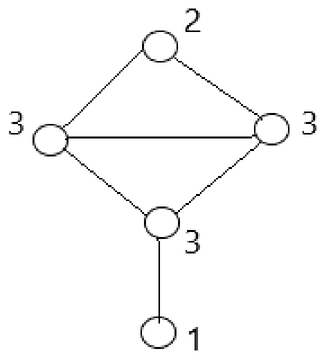

Рис. 1:

Определение 1. *Путь в графе - посл-ть вершин* $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots v_{n+1} e_{n+1} v_n$
$v_i \in V; \quad e_i \in E \quad e_i = (v_i; v_{i+1})$

Пример

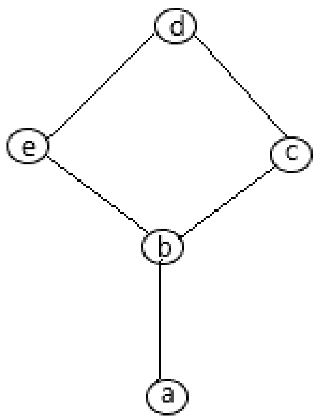

Рис. 2:

Определение 2. *замкнутый путь - если* $v_1 = v_n$;
не замкнутый, открытый ($v_1 \neq v_n$)

Определение 3. *Простой путь, если* $e_i \neq e_j$, *при* ($i \neq j$)

5) bedce простой, но не замкнутый

Пути		все ребра разные	все вершины разные (кроме V_1 и V_2
замкнутый	замк.путь	прост.замк.путь	цикл
открытый	откр.путь	прост.откр.путь	цепь

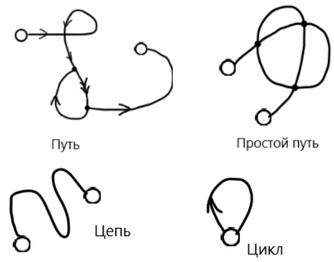

Рис. 3:

Теорема 1. *Если ∃ путь между вершинами u,v => есть цепь от u до v.*

Доказательство. рассмотрим путь
$\underline{u}$ e_1 v_1 e_2 v_2...e_n v_n
рассмотрим все пути из этих рёбер и выберем min. Это будет цепь.
Пусть v_i = v_i укоротим u...v_i=v_i... v ??

□

Теорема 2. *если есть простой путь черепз ребро e => есть цикл через e.*

Доказательство. : Аналогично ■
Замечание:

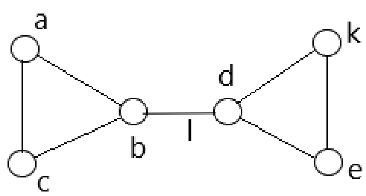

Рис. 4:

dbacbd - не простой путь (e повторяется) цикла через e нет.

□

Связность графа

Определение 4. *G-связен, если* $\forall$ *u,v* $\in$ *V*
$\exists$ *цепь (путь) из U в V = (V,U)*

Примеры:

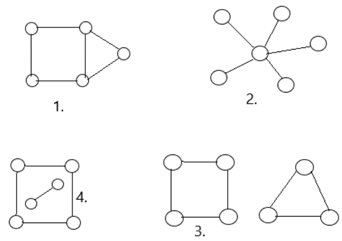

Рис. 5:

Введём отношение $\equiv$ на вершине графа.
$u \equiv v$, если $\exists$ путь из U в V
Пример:

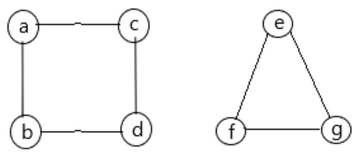

Рис. 6:

$a \equiv c$ $a \equiv d$ $e \equiv g$ $\cancel{a \equiv e}$
Проверим, что $\equiv$ - это отношение эквивалентности
1) рефлексивно $u \equiv u$ - верно путь u.
2) симметрично $u \equiv v$ =>(?) $v \equiv u$
Путь u e1v1...v...
Путь v... v1e1 u
3) транзитивно $u \equiv v$,
$v \equiv w$
путь ue1...v...w
путь u-w. ■

Определение 5. *Классы эквивалентности* $\equiv$ *-это "комп. связности".*

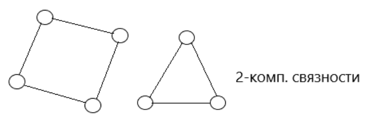

Рис. 7:

Определение 6. *G_1 - подграф $G = (V,E)$*
если V_1 с V
E_1 с E

Пример:

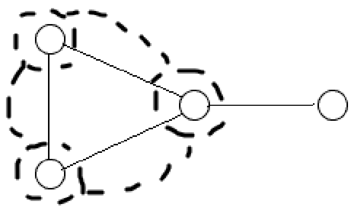

Рис. 8:

Замечание G - свой подграф $\oslash$, $\oslash$ - подграф чего угодно.

Определение 7. *G=(V,E). Ребро e называется мостом, если количество комп. связности G<кол-во комп. связян. (V, E e)*
Пример

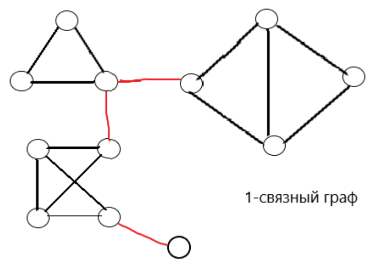

Рис. 9:

Определение 8. *Степень связности графа G - это min кол-во рёбер, которые надо выкинуть, чтобы G стал несвязным.*

Определение 9. *двусвязный граф.*
Надо выкинуть хотя бы 2 ребра, чтобы он стал несвязным.

Замечание Двусвязный граф <=> нет мостов и связей.
Пример

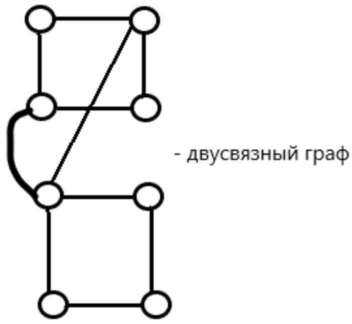

Рис. 10:

Определение 10. *Вершина $v \in V$ называется точкой сочетания если кол-во компонент связности G<кол-во компон. св-ти G =m (V {v}, E { (v,u) / (u,v) $\in$ E })*

Пример

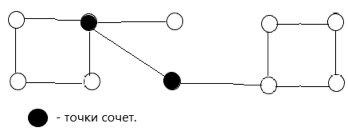

Рис. 11:

Считаем рёбра вершины.

Теорема 3. *в графе G = (V,E) если deg(a) - степень вершины u.*
/ E / = $\frac{1}{2} \sum_{v=V} deg(v)$

Пример

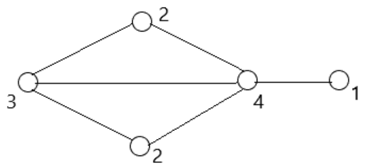

Рис. 12:

6= $\frac{1}{2}$ (3+2+2+4+1) верно
Док-во: deg(v)=кол-во рёбер, выход из вершины.
$\sum_{v=V} deg(v)$ = все рёбра посчитаны дважды = 2|E| ■
Следствие
1) сумма смежней вершин всегда чётна ■
2) вершин нечёт степени - чётно
Задача 15 инопланетян по 3 руки у каждого могут ли они взяться за руки, чтобы не было свободных рук
Решение: нет, это граф из 15 (неч.) вершин степени 3(нечёт.)

Определение 11. *Висячие вершины это вершины степени 1*

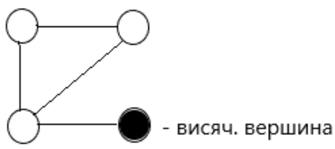

Рис. 13:

Теорема 4. *Если в графе есть рёбра, но нет висяч. вершин, то ∃ цикл*

Определение 12. *Дерево - связный граф без циклов*

Примеры

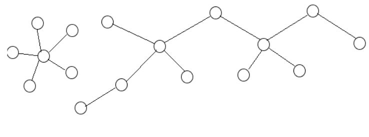

Рис. 14:

Определение 13. *В $\forall$ дереве $\geq$ 2 висяч. верш.*

Доказательство. Берём $\forall$ верш., если она не висяч., идём по ребру, если опять не висяч. есть ещё ребро и т.д. циклов нет => будет конец это в/верш.
Чтоб найти вторую, нужно начать из первой

□

Теорема 5. *Если G - дерево, то |V| = 1 + |E|*

Пример:

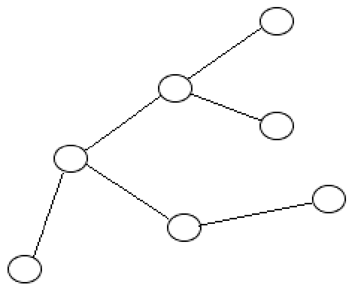

Рис. 15:

Док-во: по индукции (кол-во вершин)
База: |V|=1
|E|=0 |V|=|E|+1
П: Пусть |V|=n+1
Найдём висяч.
Удалим её и ребро.

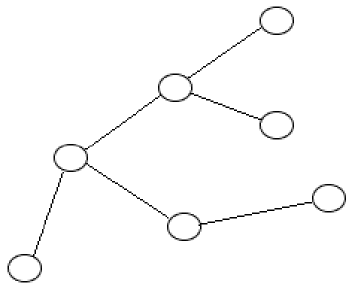

Рис. 16:

G'=(V*{ V }, E {e}) -тоже дерево т.к. связен, нет циклов.
=> |V'|=1+|E|

$|V|=|V'|+1$
$|E|=|E'|+1$
$\Rightarrow |V|=1+|E|$ ■