Лекция 5

0371 Кузнецова Елизавета

21 September 2021

Отношение порядка

Утверждение: R - отношение порядка на $|\mathbf{M}| < \infty$(строгого или нестрогого), тогда $\exists x$- минимальный, т.е. $\forall y$ ~~x R y~~

Пример: $\geq$ на 1,2,3,4,5

1 - мин, т.к. $\forall y$ ~~1 ≥ y~~

Пример: $\vdots$ на 2,3,4,5,6

2 - мин, т.к. $\forall y$ ~~2 ⋮ y~~

3 - мин, т.к. $\forall y$ ~~3 ⋮ y~~

5 - мин, т.к. $\forall y$ ~~2 ⋮ y~~

4, 6 - не мин, т.к. $\forall y$ 4⋮2, 6⋮2

Доказательство. Берем x_1 - $\forall$ элемент множества.
Если он не минимальный $\Rightarrow \exists x_2 \not= x_1 : x_1 \succ x_2$
Если x_2 не минимальный $\Rightarrow \exists x_3 \not= x_2 : x_2 \succ x_3$
...
Если не можем найти минимальный элемент $\Rightarrow$ т.к. множество конечно в какой-то момент $x_i = x_j$ (повтор).
$x_i \succ x_i + 1 \succ ... \succ x_j - 1 \succ x_j = x_i$
Отношение порядка транзитивно $\Rightarrow x_i \succ x_j - 1$, $x_j - 1 \succ x_i$, $x_j - 1 \not= x_i$ - невозможно т.к. антисимметрично. □

Отношение R_1 на множестве $\mathbf{M}$ расширяет R_2 на $\mathbf{M}$, если $R_2 \subset R_1$

Замечание: R_1 "добавляет"пары, где xRy

Замечание: $xR_2y \Rightarrow xR_1y$

Топологическая сортировка

Теорема 1 (О топологической сортировке)**.** *Если $\succ$ - отношение порядка(сторогого или нестрогого) на конечном множестве $\mathbf{M}$, то $\exists \succcurlyeq$ - отношение линейного порядка на $\mathbf{M}$, такое что $\succcurlyeq$ расширяет $\succ$.*

Пример: Подчинение

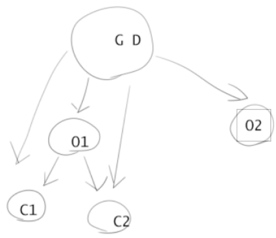

Рис. 1: Не линейный порядок (O1 и O2 не связаны)

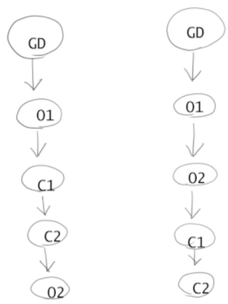

Рис. 2: Варианты топологической сортировки

Доказательство. Находим минимальный элемент исходного отношения $\succ$. Пусть это $x_1 \in \mathbf{M}$.
Удалим x_1 из $\mathbf{M}$.
Очевидно, новое отношение - тоже отношение порядка $\Rightarrow \exists$ минимальный элемент - x_2. Удаляем x_2 и продолжаем.
Итого, имеем последовательность $x_1, x_2, ..., x_n$
Вводим новый порядок $x_i \succ\succ x_j$ для $i < j$. $\succ\succ$ расширяет $\succ$.
Если $x \succ y \Rightarrow x$ был удален раньше y. $\square$

Замечание: Этот алгоритм не эффективен. Лучше сделать поиск в глубину с обратной нумерацией.
Замечание: Топологическая сортировка - практически важная задача.

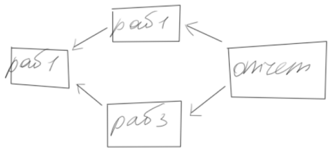

Рис. 3: Порядок работ

$p_1 \to p_2 \to p_3 \to o$
$p_1 \to p_3 \to p_2 \to o$

Транзитивное замыкание

Был порядок - расширяем до линейного (топологическая сортировка)
Было отношение - расшиярем до транзитивного (транзитивное замыкание)
Пример: Подчинение $HRO1$, $O1RC1$, но $\cancel{HRC1}$.

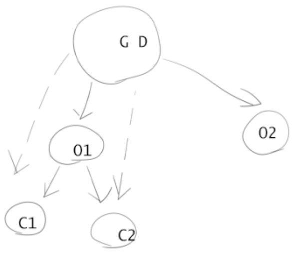

Рис. 4: Подчинение

Если добавить в отношение, что $HRC1$, $HRC2$, станет транзитивно.

Теорема 2. *Пусть R - бинарное отношение на $\mathbf{M}$ $\exists \overline{R}$ - отношение на $\mathbf{M}$:*

1. *$\overline{R}$ расширяет R $R \subset \overline{R}$*
2. *$\overline{R}$ - транзитивно*
3. *$\overline{R}$ - минимальное транзитивное расширение, т.е., если $\overline{\overline{R}}$ - транзитивное расширение R, то $\overline{\overline{R}} \subset \overline{R}$*

Доказательство. Рассмотрим все транзитивные расширения $\overline{R}_i$
$\overline{R} = \cap \overline{R}_i$
Т.е. берем только те праы, которые есть во всех транзитивных расширения. Пример: $M = \{a, b, c, d\}$: aRb, bRc, bRd.

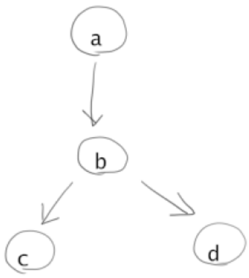

Рис. 5: Исходный граф

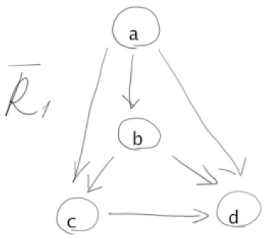

Рис. 6: 1 транзитивное расширение

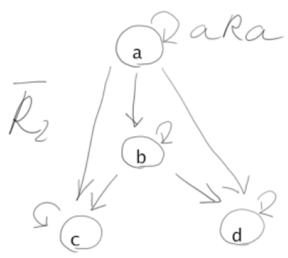

Рис. 7: 2 транзитивное расширение

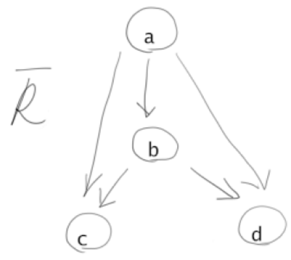

Рис. 8: Минимальное транзитивное расширение

Проверим, что $\overline{R}$ подходит под условия:

1. $\overline{R}$ расширяет R. Пусть $xRy \Rightarrow \forall \overline{R}$: $x\overline{R}_i y \Rightarrow x\overline{R}y$
2. $\overline{R}$ - транзитивно.
Пусть $x\overline{R}y$, $y\overline{R}z \Rightarrow \forall \overline{R}_i x\overline{R}_i y, y\overline{R}_i z \Rightarrow x\overline{R}_i z$ (транзитивно) $\Rightarrow x\overline{R}z$
3. $\overline{R}$ - минимальное транзитивное расширение, т.е., если $\overline{\overline{R}}$ - транзитивное расширение R, то $\overline{\overline{R}} \subset \overline{R}$

0. $\exists R_i$? $\overline{R}_i$ - полное отношение M. □

Графы

Определение 1 (Неориентированный граф)**.** *$G = (v, E)$, где V - множество (вершины), $E \subset \{(U, V)\ U, v \in V\}$ - неупорядоченные пары.*

Замечание: изображение: вершины - $\cdot$. Пары - линии. Примеры:

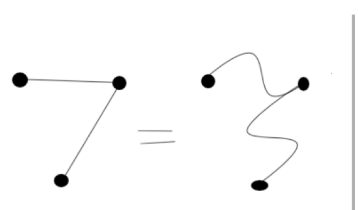

Рис. 9: Один и тот же граф

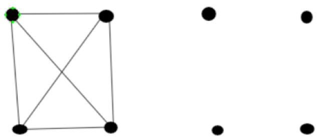

Рис. 10: 1 - полный граф, 2 - пустой граф

Определение 2 (Полный граф)**.** $\forall u, v \in V : (u, v) \in E$

Замечание: V-vertex, E-edge

Определение 3. *$|G|$ - размер(порядок) графа = $|V|$ - количество вершин.*
$|V|= n$ - количество вершин
$|E|= m$ - количество ребер
G - это (n, m)-граф

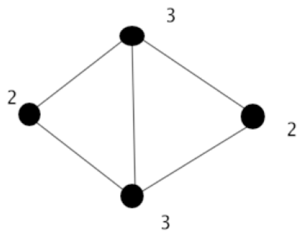

Рис. 11: (4,5)-граф

Определение 4. *Степень вершины $degv, v \in V$ - количество ребер у вершины - $|(v, u)/(v, u) \in E|$*

Определение 5. *K - регулярный граф, где $\forall v \in V$ $degv = k$*

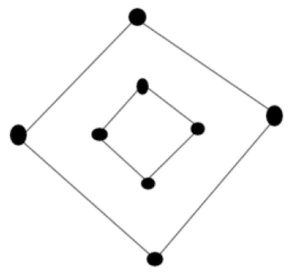

Рис. 12: 2-регулярный граф