

Лекция 1

Елизавета Кузнецова 0371

07 September 2021

Бинарные отношения

Определение 1 M - непустое множество

$R \in M \times M$ - бинарное отношение

$M \times M$ - множество пар из элементов R

$$M = \{a, b, c\} \quad M \times M = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$$

Если $M = \mathbb{N}$:

$$M \times M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), \dots, (42, 15)\dots\}$$

Отношение R - это подмножество пар

$(x, y) \in R$ - пара $(x, y) \in xRy$

$(x, y) \notin R = x \not R y$

Примеры 1 1. $M = \mathbb{R}$ R - отношение $>$: $R = \{(x, y) | x > y\}$

$$(3, 2) \in R \Leftrightarrow 3R2 \Leftrightarrow 3 > 2$$

$$(3, 2) \notin R \Leftrightarrow 3 \not R 2 \Leftrightarrow 3 > 2$$

2. $M = \mathbb{R}$ R - отношение \geq : $R = \{(x, y) | x \geq y\}$

$$7 \geq 6$$

$$7 \geq 7$$

$$7 \not\geq 8$$

3. $M = \mathbb{R}$ R - отношение $=$: $R = \{(x, y) | x = y\}$

$$7 = 7$$

$$7 \neq 8$$

$$(7, 7) \in =$$

$$(7, 8) \notin =$$

4. $M = \mathbb{R}$ R - отношение \approx : $R = \{(x, y) | |x - y| < 1\}$

5. $M = \mathbb{R}$ R - отношение $\#$: $R = \{(x, y) | x^2 > y\}$

$$2 \# 2 \quad 2^2 > 2$$

$$1 \not\# 2$$

$$7 \# 8$$

$$7 \not\# 100$$

6. $M = \mathbb{N}$ или $M = \mathbb{Z}$ R - отношение $:$: $x:y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = ky$

$$4:2 \quad 10:5 \quad 7 \not: 0$$

$$2 \not: 4 \quad 10 \not: 3 \quad 0:0$$

7. $M = \mathbb{N}$ R - отношение $\equiv \pmod{3}$

$$0 \equiv 3 \pmod{3} \quad 1 \equiv 4 \pmod{3}$$

$$0 \not\equiv 2 \pmod{3} \quad 1 \equiv 7 \pmod{3}$$

8. $M = \mathbb{N}$ $a \text{Ц} b$, если в числе a " b " цифр

$$100 \text{Ц} 3$$

$$238 \text{Ц} 3$$

$$238 \not\text{Ц} 8$$

9. M - прямые на \mathbb{R}^2 . Отношение \parallel

$l_1 \parallel l_2$, если $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ или $l_1 = l_2$
 10. Отношение \perp $l_1 \perp l_2$

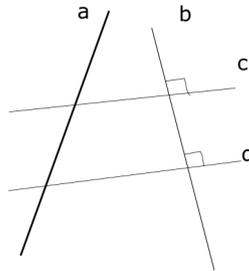


Рис. 1: Прямые

\parallel , \perp , Δ , ∇ , \neq

11. \mathbb{M} - студенты ЛЭТИ. Отношение \succ

$x \succ y$ - средний балл за последнюю сессию x больше, чем у y

12. \mathbb{M} - пользователи «одноклассники». Отношение \rightarrow , если « y » в друзьях у « x »

Иванов \rightarrow Петров

Петров \nrightarrow Посов

Свойства бинарных отношений

Определение 2 Бинарное отношение R на \mathbb{M} - рефлексивное, если $\forall x \in \mathbb{M} : xRx$ ($(x, x) \in R$).

Отношение не рефлексивно $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{M} : \neg xRx$

$=$ - рефлексивно $\forall x : x = x$

\geq - рефлексивно $\forall x : x \geq x$

\approx - рефлексивно $\forall x : x \approx x$ $|x - x| = 0 < 1$

\vdots - рефлексивно $\forall x : x \vdots x$

$>$ - не рефлексивно $2 \not> 2$

\sqsubset - не рефлексивно $2 \not\sqsubset 2$

\rightarrow - не рефлексивно Посов \nrightarrow Посов

Определение 3 Бинарное отношение R на \mathbb{M} - антирефлексивное, если $\forall x \in \mathbb{M} : \neg xRx$.

R - не антирефлексивно $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{M} : xRx$

$>$ - антирефлексивно $x \not> x$

\perp - антирефлексивно $l \not\perp l$

\rightarrow - не рефлексивно. Нельзя быть у себя в друзьях \subset - не антирефлексивно $1 \subset 1$

Не бывает отношения и рефлексивного, и антирефлексивного одновременно, но отношение может не быть ни рефлексивным, ни антирефлексивным (\subset).

$a \in M$:

$aRa \Rightarrow$ не антирефлексивно

$a \not Ra \Rightarrow$ не рефлексивно

Определение 4 Бинарное отношение R на M - симметричное, если $\forall x, y \in M : xRy \Leftrightarrow yRx$.

R - не симметрично $\Leftrightarrow \exists x, y xRy, x \not Ry$

$=$ - симметрично $x = y \Leftrightarrow y = x$

\approx - симметрично $|x - y| < 1 \Leftrightarrow |y - x| < 1$

$\dot{:}$ - не симметрично $4 \dot{:} 2 \quad 2 \not\dot{:} 4$

$\|, \perp$ - симметрично $a \| b \Leftrightarrow b \| a$

\subset - не симметрично $100 \subset 3 \quad 3 \not\subset 100$

Определение 5 Бинарное отношение R на M - антисимметричное, если $\forall x \neq y \in M : xRy \Leftrightarrow y \not Rx$.

R - не антисимметрично, если $\exists x \neq y xRy, xRy$ - контрпример

$>$ - антисимметричное $x \neq y \quad x > y \Rightarrow y \not> x$

$x \neq y \quad x > y, y > x$ - невозможно \Rightarrow нет контрпримера \Rightarrow антисимметрично

$x \neq y \quad x \geq y, y \geq x$ - невозможно \Rightarrow нет контрпримера $\Rightarrow \geq$ - антисимметрично

$x \neq y \quad x = y, y = x$ - невозможно \Rightarrow нет контрпримера $\Rightarrow =$ - антисимметрично

$\equiv \pmod{3} \quad 1 \not\equiv 4 \quad 1 \equiv 4 \pmod{3}, 4 \equiv 1 \pmod{3}$ - нет контрпримера \Rightarrow - антисимметрично

$\dot{:}$ на \mathbb{N} - антисимметрично $x \neq y \quad x \dot{:} y, y \not\dot{:} x$

$\dot{:}$ на \mathbb{Z} - не антисимметрично $4 \dot{:} -4 \quad -4 \not\dot{:} 4, -4 \dot{:} 4$ - контрпример