Комбинаторика и теория графов

Конспектировал: студент группы 0302 Хаматов Вадим

2021

Содержание

1 Бинарные отношения

Лекция 1

Определение M - множество $\neq \oslash$

R $\subset$ M x M - бинарные отношения Пояснение M x M - множество пар из элементов R. Допустим M = a,b,c

M x M = [(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)]

или

M = N $\rightarrow$ M x M = N x N = [(1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3)...∞]

отношения R - это подмножество пар.

Обозначение (x,y) $\in$ R - пара (x,y) принадлежит отношению.

Иначе xRy

вместо (x,y) $\notin$ R будем писать ~~xRy~~

Примеры

1. M = R $\succ$ R = [(x,y) :x > y]

(3,2) $\in R$ 3R2   3>2

(3,4) $\notin$ R $\underline{3R4}$ $\underline{3 > 4}$

2. M = R отношение "$\geq$"   7$\geq$6   7$\geq$7

~~7$\geq$8~~

3. M = R отношение =   7=7

~~7=8~~

4. M = R : $\approx$ $(x, y) \in \approx \quad x \approx y \leftrightarrow |x - y| < 1$

5. M = R : @ x@y $\leftrightarrow$ x * x > y

~~2@2~~ т.к. 2*2 > 2

~~1@2~~

6. M = N $\vdots x \vdots y \leftrightarrow \exists\ k \in Z : x = ky$

4 $\vdots$2

$\cancel{2 \vdots 4}$

7. M = Z $\quad \equiv_3 \quad 0 \equiv_3 3 \quad 1 \equiv_3 4 \quad \cancel{1 \equiv_3 8}$

$\cancel{0 \equiv_3 2} \quad 1 \equiv_3 7$

8. M = N Ц

a Ц b, если в числе a "b"цифр

100 Ц 3

~~238 Ц 3~~

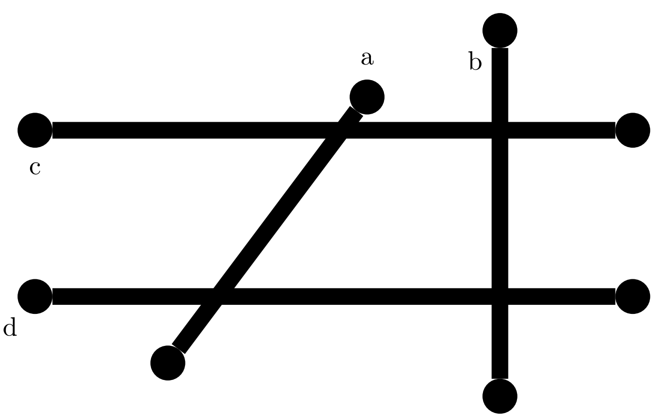
9. M = прямые на R^2

|| - e_1 || e_2, если l_1 не пересек l_2 при $l_1 = l_2$

10. $\perp$ $e_1 \perp e_2$ перпендикулярны

c || d $\quad$ b $\perp$ c

a || a



11. Студенты ЛЭТИ

x$\succ$y средник балл за последнюю сессию больше у x

12. M=пользователи одноклассники

x$\rightarrow$y, если 'y' в друзьях у 'x'

Иванов $\rightarrow$ Петров

~~Петров $\rightarrow$ Посов~~

Свойства бинарных отношений

Определение

Бинарное отношение R на V называют рефлексивным,если $\forall x \in M$ x R x (x,x)$\in R$

Замечание: Отношение не рефлексивно $\leftrightarrow$ $\exists$ ~~xRx~~ - контрпример.

= - рефлексивно $\forall$ x: x=x

$\geq$ $\forall$ x : x $\geq$ x

> - не рефлексивно 2>2

Ц - не рефлексивно ~~3Ц3~~

Определение

Бинарное отношение R на множестве R называетсяантирефлексивным, если $\forall$ x x R x

Замечание : R - не антирефлексивно $\leftrightarrow$ $\exists$ x : x R x - контрпример

Примеры > x>x (> - антирефлексивно)

Ц - не антирефлексивно контрпример 1ц1

Замечание

1) Ц - не рефлексивно не антирефлексивно

2) Не бывает R, которое и рефлекторно, и антирефлексивно (рассмотрим a $\in$ M $\rightarrow$ a R a $\rightarrow$ не антирефлексивно $\rightarrow$ ~~a R a~~$\rightarrow$ не рефлексивно

Определение Бинарное отношение R, на множестве M симметрично, если $\forall$ x,y x R y $\leftrightarrow$ y R x

Замечание R не симметрично $\leftrightarrow$ $\exists$ x,y : xRy ~~yRx~~

Пример: = - симметрично x=y $\leftrightarrow$ y=x

$\approx$ - симметрично x $\approx$ y $\leftrightarrow$ y $\approx$ x

|x-y| < 1 |y-x| < 1

$\vdots$ - не симметрично 4 $\vdots$ 2

~~2$\vdots$4~~(контрпример)

$\parallel$, $\perp$ - симметрично. a $\parallel$ b $\leftrightarrow$ b $\parallel$ a

Ц - не симметрично. 100 Ц 3 ~~3 Ц 100~~

Определение Бинарное отношение R на множестве M антисимметрично, если $\forall$ x $\neq$ y x R y $\rightarrow$ ~~yRx~~

Замечание: R - не антисимметрично, если $\exists$ x $\neq$ y x R y, y R x - контрпример.

>: x $\neq$ y , $\rightarrow$ y > x

$x \neq y$, x > y, y > x - невозможно

$\geq$ - x $\neq$ y x $\geq$ y , y $\geq$ x - нет кнтр примера

= - антисимметрично (x $\neq$ y) x=y, y=x - такое невозможно

$\equiv_3$ - симметрично (1 $\neq$ 4) 1 $\equiv_3$ 4, 4 $\equiv_3$ 1

$\vdots$ над N - антисимметрично (x $\neq$ y) x $\vdots$ y , y $\vdots$ x - невозможно при N

$\vdots$ над Z - не антисимметрично (4 $\neq$ -4) 4 $\vdots$ -4, -4 $\vdots$ 4 **Лекция 2**

2 Антисимметричность

$\vdots$ на Z - не антисимметрично

$-2\vdots2$ - контрпример

2 $\neq$ -2

$\vdots$ на N - антисимметрично x $\neq$ y x $\vdots$ y y $\vdots$ x $\Rightarrow$ невозможно

x $\neq$ y x $\vdots$ y $\Rightarrow$ x $\not\vdots$ y

Определение R - бинарное отношение на M- ассиметричность, если $\forall$ x, y xRy $\Rightarrow$ yRx (x 6= y- y антисимметричность) контрпример - xRy, yRx

Утверждение R- симметрично <=> R-антисимметрично и антирефлексивно

Пример

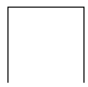
>- асиметрично $\forall$ x, y x>y=> ~~y>x~~ (пустое)- асиметрично (пусто, когда R=0) "выше асиметрично "начальник"x нач y => ~~y нач x~~ R-бинарное отношение транзитивно, если $\forall$ x, y, z x xRy, yRz => xRz

Контрпример > трназитивно x>y, y>z=> x>z $\geq$ транзитивно

$\vdots$ транзитивно x $\vdots$ y, y $\vdots$ z => x $\vdots$ z

$\perp$ не транзитивно x $\perp$ y, y $\perp$ z, ~~$x \perp z$~~

y

z  x

Ц(кол-во цифр) 100Ц3 3Ц1

не транзитивно 100Ц1

Определение Отношение R называется отношением эквивалентности, если R-рефлексивно, симметрично, транзитивно

Пример

= на R(или ∀ другом множестве)

∀x x=x- рефлексивно

∀x,y x=y => y=x- симметрично

∀x,y,z x=y, y=z => x=z- транзитивно

= -это ОЭ

||- параллельность

≡-сравнение

≥ - не ОЭ т.к. не симметрично

$x \geq y => y \geq x$

$z \geq 1, 1 \geq z$

≈- не ОЭ(по транзитивности)

↑

отношение ↑ на N x↑y, если у x и y поровну цифр

2 ↑ 5 35 ↑ 100

12 ↑ 42

ОЭ x ↑ x- рефлексивно

x ↑ y => y ↑ x- симметричность

x ↑ y, y ↑ z=> x

=,||,≡,↑ - ОЭ

R - ОЭ на множестве M

x ∈ M, класс элемента x

$M_x = y|xRy$

Пример

$= M_5 = 5 \equiv_3 M_2 = 2, 5, 8, 11...$ $//M_e = ////////...$

Утверждение

R-ОЭ на М

∀ x, y ∈ M $M_x = M_y$ или MX $\cap M_y = 0$

Доказательство

⊃ MX ∩ M_y 6= 0=> ∃ z ∈ $M_x, z \in M_y => xRz,$

yRz=>(симм.)=>zRy=>(транз.)=>xRy

Теперь проверим, что класс Mx = My Возьмем u ∈ M_x, проверим, что u ∈ M_y

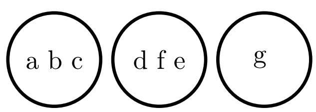
u ∈ $M_x => xRu$

xRy => yRx => yRu => u ∈ M_y

Следствие R-ОЭ не М тогда М разбито на несколько классов эквивалентности $M = M_{1u}...uM_n$ $M_i \cap M_j = 0 =$ на N=1 и 2 и 3... $\equiv_3$ на N=0,3,6,9,...1,4,7,10,...2,5,8,11,...

Замечание

Если есть M=0 разбитое на $M_i = 0$ $M = M_{1u}...uM_n$ и $M_i \cap M_j$ Тогда можно ввести отношение R x R y, если ⊃ M_i : x,y ∈ M_i a b c d e f g



aRb bRc $\cancel{aRd}$ gRy $\cancel{gRa}$

Отношения порядка (выше, лучше, сильнее, важнее) **Определение**

R-бинарное отношение

R- транзитивно, антисимметрично

1)рефлексивно-нестрогий порядок

2)антирефлексивно- строгий порядок

обозначения обычно $\succeq$ нестрогий $\succ$ строгий

$a \succ bb \succ c => a \succ c$

антисимметрично $a \succ b$ b $\succ$ a

Примеры

> на R- строий порядок

≥ R- не строгий порядок

$\vdots$ на N- не строгий порядок

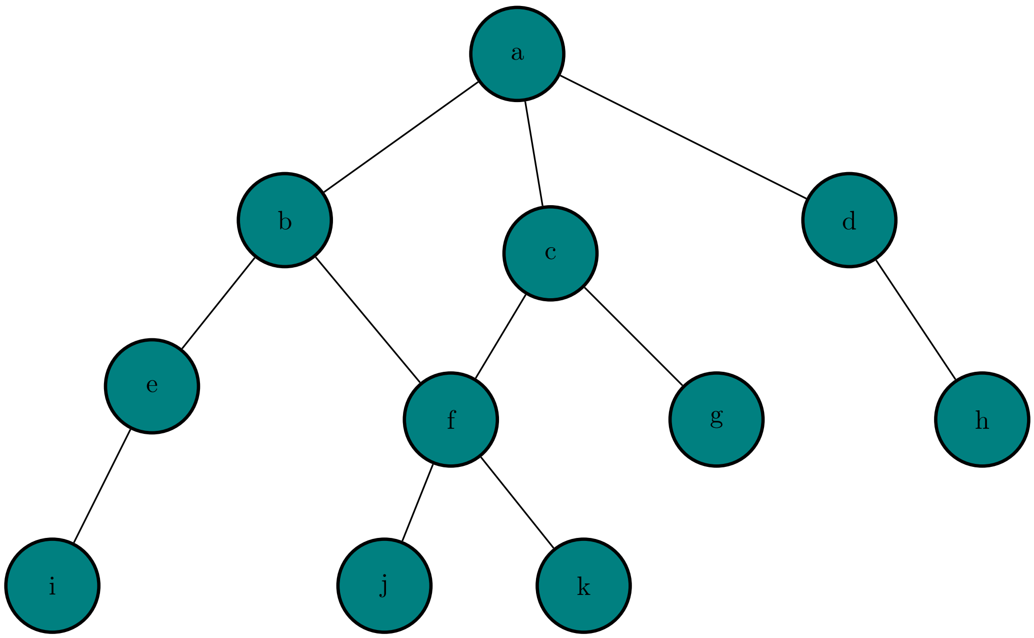
нач

a нач b

a нач c

b нач f

c нач f



Определение

$\supset$ R-строгий или нестрогий порядок R-линейный, если $\forall$ x 6= y xRy или yRx

R- частичный иначе ($\supset x6 = yxRyyRx$)

Примеры $>$, $\geq$ -линейный порядок

$\vdots$ - частичный ~~2⋮3~~ ~~3⋮2~~

нач- частичный

Утверждение

R- порядок(строй или нестрогий) на M- конечное |M|$<\infty$

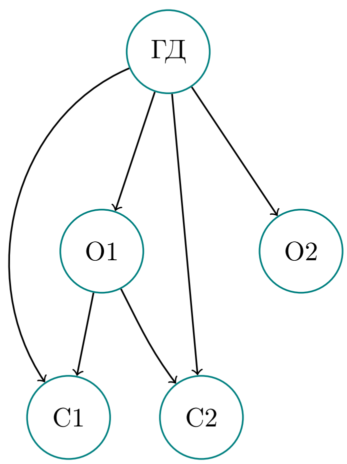
Тогда $\ni$ x - минимальный, т.е. $\forall$ y : x $\succ$ y **Лекция 3**

3 Топологическая сортировка

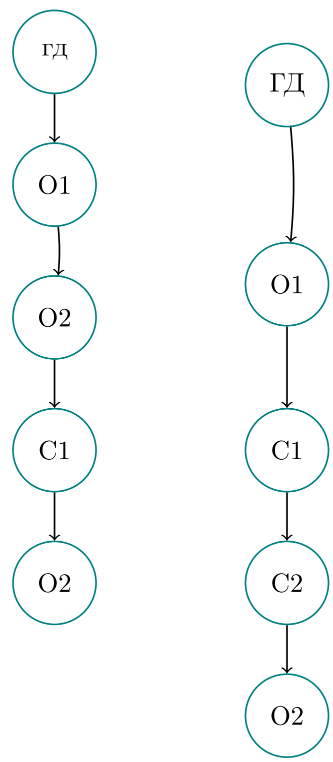
Определение Отношение R_1 на множестве $\mathbb{M}$ *расширяет* R_2 на $\mathbb{M}$, если $R_2 \subset R_1$. R_1 добавляет пары где xRy. То есть из xR_2y следует, что xR_1y.

Теорема о топологической сортировке

Если отношение порядка $\succ$ — строгое или нестрогое на конечном множестве $\mathbb{M}$, то существует $\gg$ — отношение линейного порядка на $\mathbb{M}$, такое что $\gg$ расширяет $\succ$.



не линейный порядок



топологическая сортировка

где ГД - генеральный директор, О - начальник отдела, С - сотрудник.

Доказательство Найдем минимальный элемент отношения $\succ$ (пусть это $x_1 \in \mathbb{M}$) и удалим его из множества. Теперь имеем ограниченное отношение $\succ|_{\mathbb{M}-\{x_1\}}$. Очевидно, что это новое отношение имеет те же свойства, что и изначальное (антисимметрично, транзитивно и рефлексивно/антирефлексивно). В нем тоже есть минимальный элемент x_2, который мы удаляем и получаем ограниченное множество $\succ|_{\mathbb{M}-\{x_1,x_2\}}$. Продолжаем...

В какой-то момент по свойству конечности множество $\mathbb{M} - \{\forall x_i\}$ станет пустым. Итого, имеем последовательность $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $n = |M|$ —

размер исходного множества $\mathbb{M}$.

Вводим новый порядок $x_i \ll x_j$ для $i < j$:

$$x_1 \ll x_2 \ll \cdots \ll x_n$$

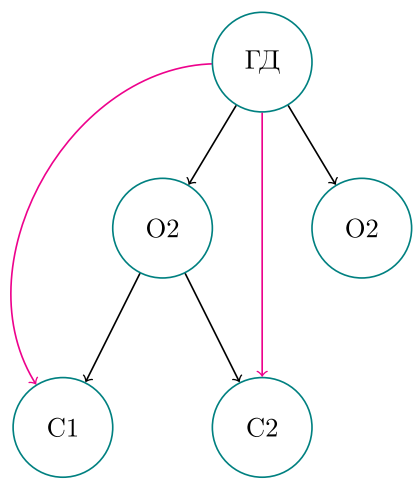
Почему $\ll$ расширяет $\prec$? Если $x \prec y$, то x был удален из множества раньше y, следовательно $x \ll y$.

Замечание Алгоритм поиска минимума и удаления не самый эффективный. Более эффективно будет сделать поиск в глубину и построить обратную нумерацию.

Замечание Топологическая сортировка - практически важная задача. Как пример зависимостей: нельзя расдать листовки, пока они не напечатаны, при этом нельзя распечатать листовки, пока нет чернил и бумаги.

4 Транзитивное замыкание

По решению задачи топологической сортировки мы расширяли порядок до линейности. Теперь перед нами стоит задача расширить отношение до транзитивности.



Пример Пусть есть отношение подчиненности:

где ГД - генеральный директор, О - начальник отдела, С - сотрудник.

Черным цветом показана изначальная связь. Мы можем сказать, что ГДRО1 и О1RС1, но отсюда не следует, что ГДRС1.

Для этого в множество необходимо добавить пару ГДRС1, чтобы отношение стало транзитивным (розовый цвет). Аналогично для ГДRС2.

Теорема Пусть R - отношение на множестве $\mathbb{M}$ и существует такое отношение $\overline{R}$ на том же множестве, что:

1. $\overline{R}$ расширяет R ($R \subset \overline{R}$).

2. $\overline{R}$ - транзитивно

3. $\overline{R}$ - минимальное транзитивное расширение, то есть если $\tilde{R}$ - транзитивное расширение R, то $\tilde{R} \supset \overline{R}$.

Доказательство условное Рассмотрим все транзитивные расширения отношения $\{\overline{R_i}\}$ и посчитаем R как пересечение всех $\overline{R_i}$ (берем те ребра, которые есть только у транзитивного расширения).

Пример Пусть множество $\mathbb{M} = \{a, b, c, d\}$ и на нем есть отношения aRb, bRc, bRd. Мы можем его любым способом достроить до транзитивного (к примеру, достроим отношения aRc, aRd, cRd). Минимальным элементом $\overline{R}$ будет являться пересечение всех таких транзитивных отношений, и оно подходит под все условия:

1. $\overline{R}$ расширяет R (пусть xRy, тогда $\forall \overline{R_i}\ x\overline{R_i}y$, значит $x\overline{R}y$).

2. $\overline{R}$ — транзитивно (пусть $x\overline{R}y$, а $y\overline{R}z$, то $\forall \overline{R_i}\ x\overline{R_i}y, y\overline{R_i}z$, значит $x\overline{R_i}z$, то есть $x\overline{R}z$).

3. $\overline{R}$ — минимальное транзитивное расширение (так как пересечение находится $\forall \overline{R_i}$).

4. Существует ли $\overline{R_i}$?
Скажем, что R_1 — полное отношение $= \mathbb{M} \times \mathbb{M}$. Получили, что расширить можно в любом случае.

5 Графы

5.1 Неориентированный граф

G = ($\mathbb{V}$,E), где $\mathbb{V}$ - множество вершин

E $\subset$ (u,v), где u,v $\in \mathbb{V}$ - пара неупорядочения

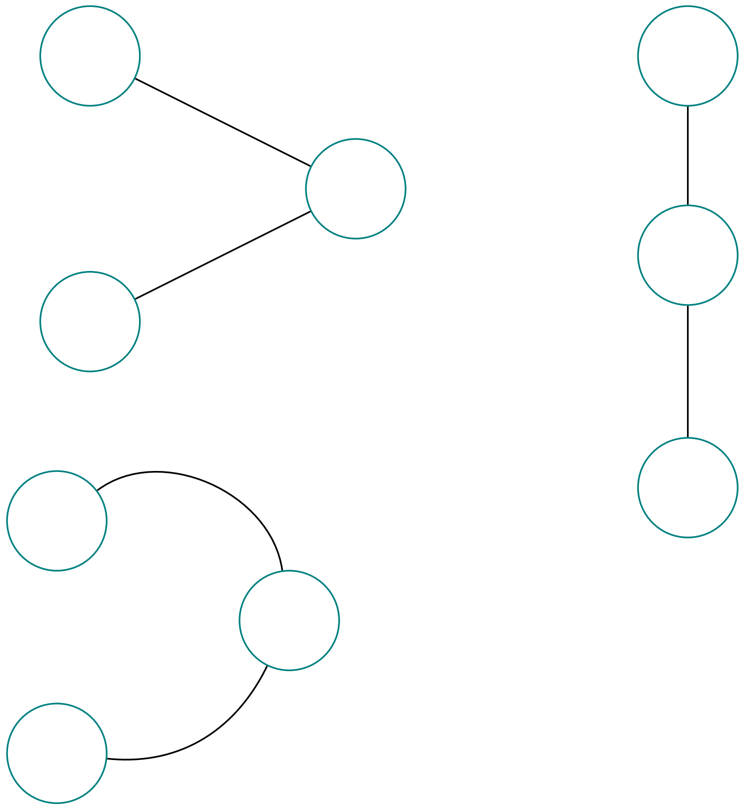
Как рисовать:

1. Вершины обозначаются точками $\cdot$ или кругами $\circ$.

2. Ребра - линии между узлами.

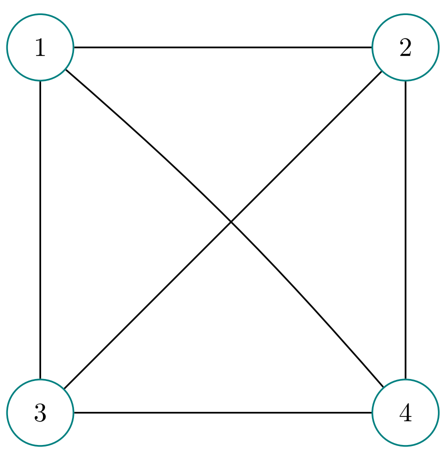
3. Важен только факт соединения.

Пример

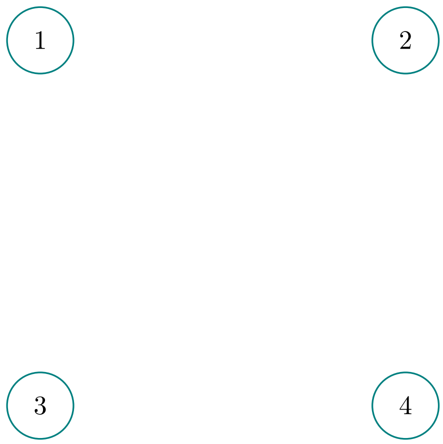


Граф G называется *полным*, если $\forall u, v \in \mathbb{V}\ (u, v) \in \mathbb{E}$.

Пример полного графа



Пример пустого графа



$\mathbb{V}$ - *vertex*, $\mathbb{E}$ - *edge*.

Определение *Размер* (порядок) графа определяется как количество вершин:$|G| = |\mathbb{V}| = n$

$|\mathbb{E}| = m$

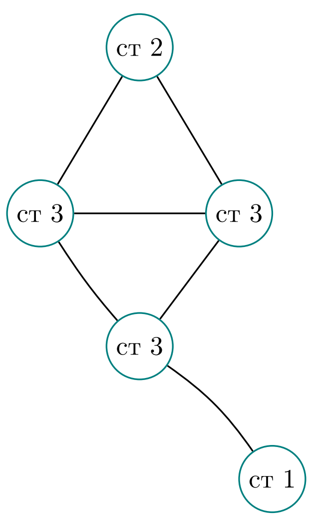
G - это (n,m) граф

Определение *Степень вершины* $v \in \mathbb{V}$ - это количество ребер с этой вершиной.

Обозначается как: $\deg v$

Определение*k-регулярным графом* называется граф, $\deg v = k$ **Лекция 4**

Степень графа



5.2 Путь в графе

Определение *Путь в графе* — последовательность вершин-ребер $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_n$ Причем, каждый e ведет от вершины v_i к $v_i + 1$.

a, b, c, d — подразумевается путь в графе от a к b, от b к c, и так далее.

Замкнутый путь - где начался, там и закончался. $V_1 = V_n$

Незамкнутый путь(открытый) - начало и конец в разных точках. $V_1 \neq V_n$

Простой путь - такой путь, в котором только различные ребра.

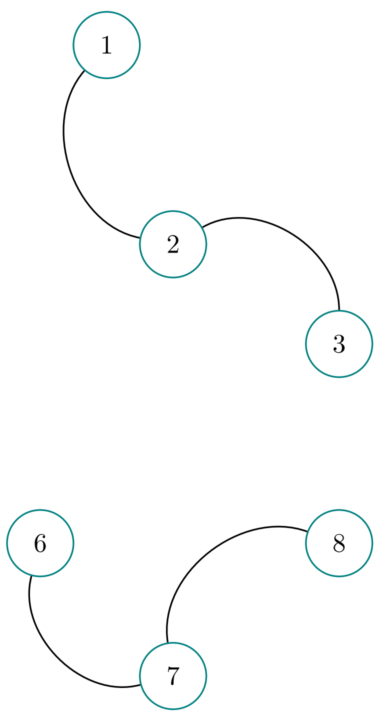
Пример

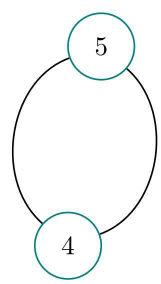
1. b, e, d, c, e - простой путь (нет повторов).
2. $a, b, c, d, e, c, d, e, b, a$ - замкнутый путь.

Определение *Циклом* называется замкнутый путь в графе, все вершины которого разные.

Определение *Цепью* называется открытый путь в графе, все вершины которого разные (кроме первой с последней).

Пример





Простые графы **Замкнутый граф**

Теорема Если между вершинами u и v существует путь, то существует и цепь между этими вершинами.

Доказательство Пусть есть путь $u, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v$. Рассмотрим все такие возможные пути и возьмем самый короткий. Поймем, что это и есть *цепь*. Представим, что какие то вершины совпали:

$$u \ldots v_i \ldots v_j \ldots v, \; v_i = v_j$$

Тогда среднюю часть можно убрать, и тогда это не самый короткий путь. Противоречие.

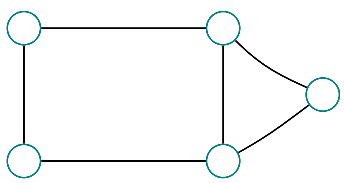
Теорема Если есть простой замкнутый путь через ребро e, то есть и *цикл* через это ребро.

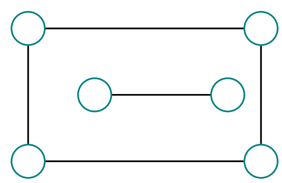
Доказательство Аналогично предыдущей теореме, можно найти самый короткий путь, где ребро не повторяется.

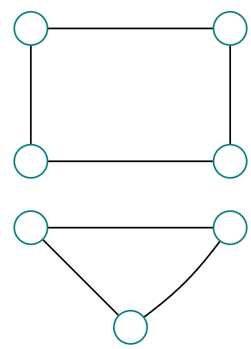
5.3 Связность графа

Определение: Граф связан, если ∀ u,v ∈ $\mathbb{V}$. ∃ цепь (путь) из u в v

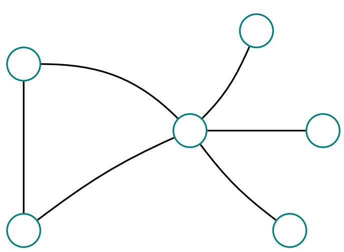
Пример







1) 2) 3)



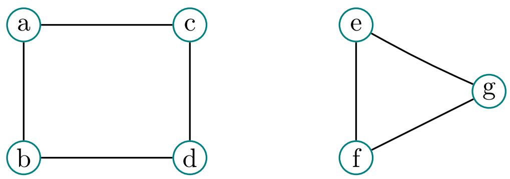
4)

1,4 - связаны 2,3 - не связаны

Введем отношение ≡ на вершинах графа:

$u \equiv v$, если $\exists$ путь из u в v

Пример



$a \equiv c \qquad e \equiv g$

$a \equiv d \qquad \cancel{a \equiv e}$

Проверим, что $\equiv$ - это отношение эквивалентности.

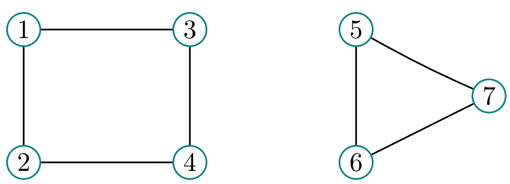
1) Рефлективность u $\equiv$ u - верно, путь u

2) Симметричность u $\equiv$ v $\Rightarrow$ v $\equiv$ u путь $u, e_1, v_1 \dots v$, путь $v \dots v_1, e_1, u$

3)Транзитивность $u \equiv v$, $v \equiv \omega$ путь $u, e_1, v_1 ... vv ... \omega$ не повторяется, а входит в 2 пути.

5.4 Компонент связности графа

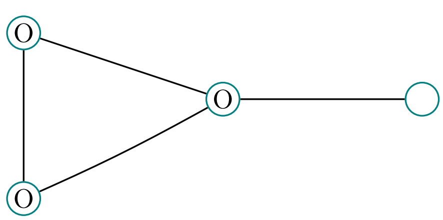
Определение: Классы эквивалентости $\equiv$ - это компоненты свзяности



2 компонент связности

Определение $G_1 = (\mathbb{V}_{\not\Bbbk}, \mathbb{E}_{\not\Bbbk}$ - подграф G, если $\mathbb{V}_{\not\Bbbk} \subset \mathbb{V}$, $\mathbb{E}_{\not\Bbbk} \subset \mathbb{E}$

Пример



Помечение "O является подграфом

<u>Замечание</u>

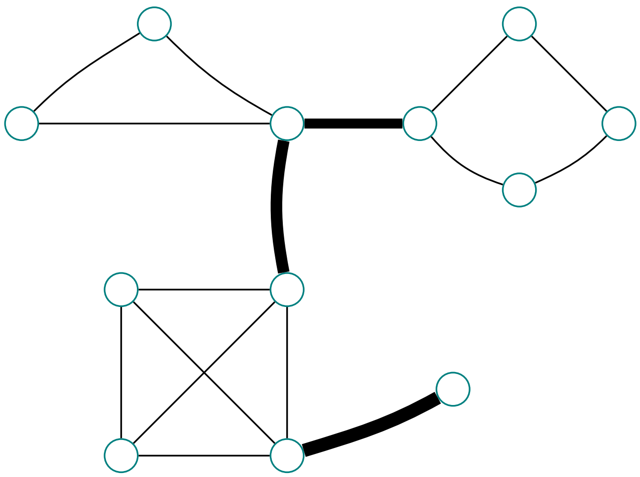
G - свой подграф

O - пусой граф - подграф чего угодно.

5.5 Мост

Определение G ребро e называется мостом, если компонент свзяности G

Пример



Жирными линиями выделены мосты

Определение Степень связности графа G - это количество ребер, которые надо выкинуть чтобы G стал несвязным.

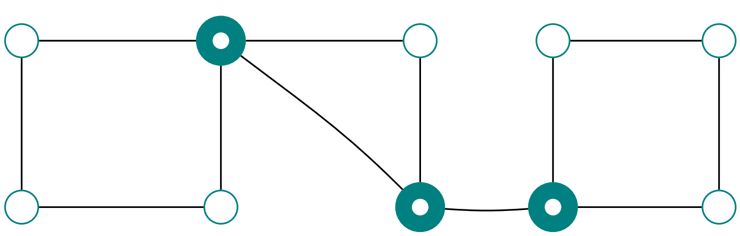
Определение Двусвязный граф - надо выкинуть больше 2 ребер, чтобы он стал связным.

<u>Замечание</u> двусвязный значит нет мостов и связи.

Определение Вершина V $\in \mathbb{V}$ называется точкой сочленения, если количество компонента связяности G $<$ количества компонента связяности G'

G' $= (\mathbb{V}_v, E'(u,v)|(v,u) \in E)$

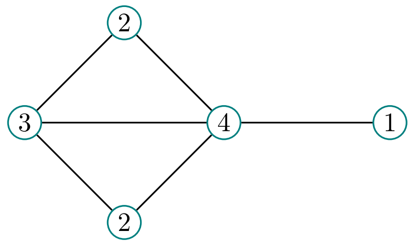
Пример



Теорема В графе G = ($\mathbb{V}$,E), если deg (u) - степень вершины u

|E| $= 1/2 \sum$deg(v)

Пример



Рёбер: 6=1/2(3+2+2+4+1) $\Rightarrow$ Верно

Доказательство

deg (v) = количество ребер, выходящих из вершин.

$\sum$ deg (v) = все ребра посчитали дважды = 2|E|

Следствие:

1) Сумма степеней вершин всегда четна.

2) Вершин нечетной степени четно.

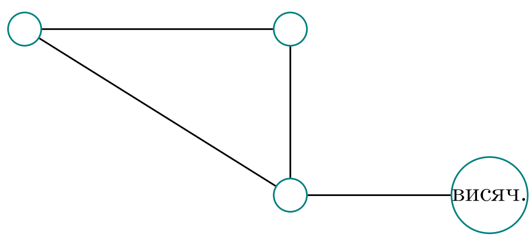
Пример

15 инопланетян, по 3 руки у каждого, могут ли они взятся за руки, чтобы не было свободных рук?

Решение Нет, это граф из 15 нечетных вершин степени 3.

5.6 Висячая вершина

Определение Висячая вершина - это вершина степени 1.



Теорема Если в графе есть ребра, но нет висячих вершин, то $\exists$ цикл.

Доказательство

Берем ребро e = (u_1, u_2)

u_2 - не висячая вершнина $\rightarrow$ из нее есть еще ребро.

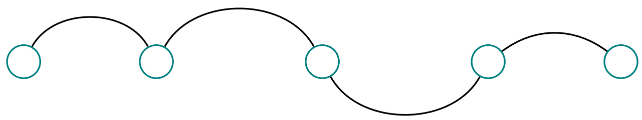
Продолжаем, пока очередность u_n не будет равна $u_i 1 \leq i \leq n$

Путь $u_i, u_{i+1}...un$ - цикл (ребра разные, вершины разные)

5.7 Дерево

Определение: Дерево - связный граф без циклов

Пример



Теорема В любом дереве ≤ 2 висячих вершины

Доказательство Берем $\forall$ вершину, если она не висячая, идем по ребру, если опять не висячая, есть ребро и т.д.

Циклов нет $\rightarrow$ Конец.

Чтобы найти вторую, надо начать из первой.

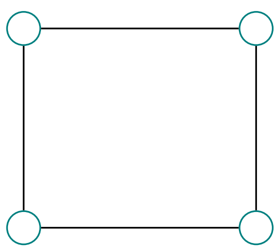
Теорема Если G-дерево, то |V| = 1 + |E|

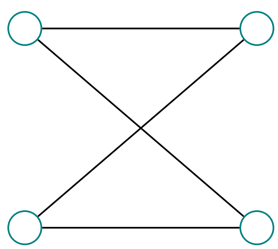
Лекция 5

5.8 Планарные графы

Определение Планарные графы - это те графы, которые можно нарисовать на плоскости так, чтобы ребра не пересекались.

Пример Пример "правильного"и "неправильного"планарных графов:

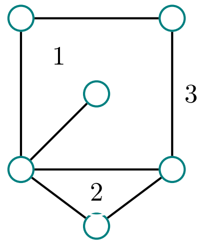


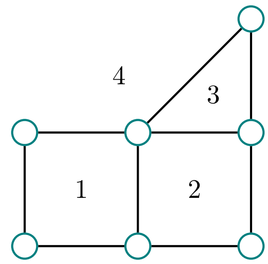


Правильный граф Неправильный граф

Теорема Формула Эйлера Если связный планарный граф $G = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$ нарисован на плоскости, то у него можно посчитать *грани* f. Пусть $|\mathbb{V}| = n, |\mathbb{E}| = m$. Тогда: $n - m + f = 2$

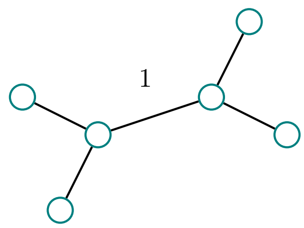
Посчитать грани следующих графов:





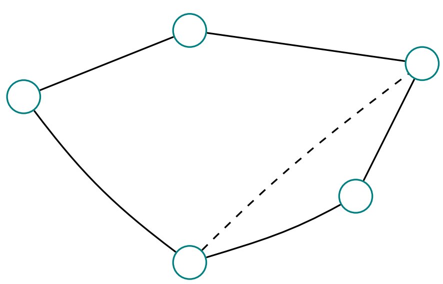
Доказательство Индукция по количеству ребер.

База: G - дерево. $m - n + f = n - (n-1) + 1 = 2$



Переход: G - не знаем, верно ли (G, G' - связные планарные), если G' имеет меньше ребер $\to$ верно

G - не дерево $\to$ есть цикл, берем ребро цикла.



Вокруг него 2 грани, удалим ребро, получим G' - тоже связан и планарен.

n',m',f' - вершины, ребра, грани G'

n'= n

m' $= m - 1$

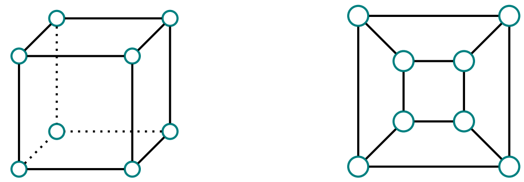
f' $= f - 1$

По индукции предположим:

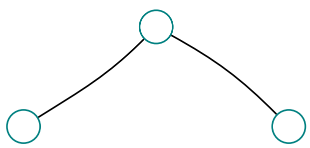
n' - m' - f' $= 2 \Rightarrow f_n - (m-1) + (f-1) = 2 \Rightarrow n - m + f = 2$

Следствия из формулы Эйлера:

1. Не важно, как рисовать планарный граф, количество граней постоянно.
2. Теорема про многогранники. $8 - 12 + 6 = 2$



3. Если граф G планарен (не обязательно связан), то:$n - m + f = 1 +$ |компоненты связности|
4. У каждой грани вокруг ≥ 3 ребра



   3f $\leq \sum$ кол-во ребер вокруг g $\leq$ 2m (у каждого ребро посчитана 1 или 2 раза)

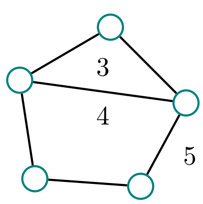
   $\Rightarrow$ 3f $\leq$ 2m

   но n - m + F = 2

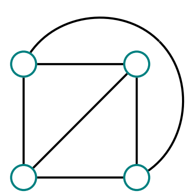
   3n-3m+3f = 6 $\Rightarrow$ 3n - 3m + 2m $\geq$ 6

   $\Rightarrow$ 3n - m $\geq$ 6 $\Rightarrow$ m $\leq$ 3n - 6

   Итого m $\leq$ 3n-6 в связном планарном графе.



5. Полный граф при $n \geq 5$ не планарен.

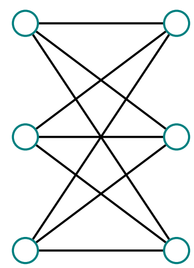


граф планарен

Доказательство n=5, m = 5*4/2 = 10, 10 $\geq$ 3*5 - 6 = 9 ??

Замечание Пусть K_5 — полный граф с количеством вершин, равным 5.

Граф $K_{3,3}$ — тоже не планарен.



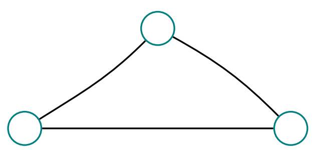
Замечание K_5 - полный граф n = 5

Утверждение граф $K_{3,3}$ тоже не планарный

Доказательство n=6, m=9 $9 \geq 3 * 6 - 6$ (верно) нет противоречия.

Сколько граней, если полярный: 6 - 9 + f = 2 $\Rightarrow$ f = 5 граней

В K_3 все циклы четные (ходим лево - право или право - лево) $\Rightarrow$ У грани $\leq$ 4 ребра

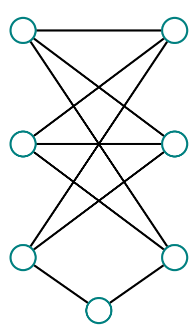


НЕВОЗМОЖНО

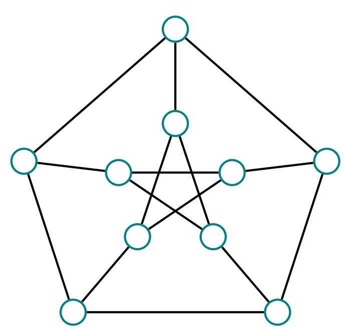
4f $\geq \sum$ ребер грани g $\geq$ 2m $\Rightarrow$ m $\leq$ 2 f $g \leq 2 * 5$

Теорема Понтрягина-Куратовского Граф G планарен только, если он не содержит полуграфов G', стягивающихся к K_5 и к $K_{3,3}$.

Пример стягивающихся графов:



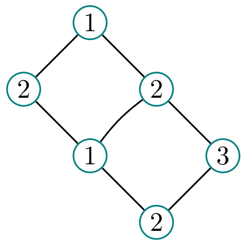
стягивается к $K_{3,3}$

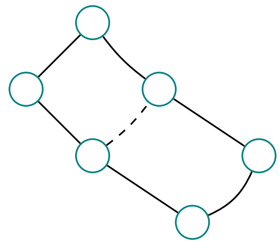


стягивается к K_5

6 Темы: Хроматизм

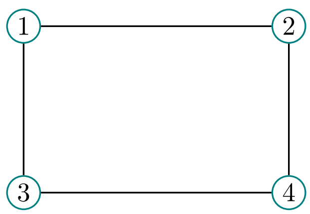
Определение раскраска графа G в K цветов это функция G : V $\rightarrow$ [1...k](целое) причем, если есть ребра (u,v), то C(u) $\neq$ C(v)

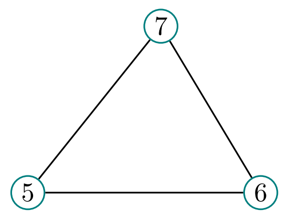




Раскраска   не раскраска

Определение Граф G двудолен, если его можно раскрасить в 2 цвета.





$K_{3,3}$ - двудольный   не двудолен

<u>Замечание</u> Двудольные графы часто рисуют из вторых частей (долей).

Теорема G - двудолен $\Leftrightarrow$ все циклы G имеют четную длину.

Доказательство 1) Двудолен $\Rightarrow$ циклы четные

2) циклы четные $\Rightarrow$ двудолен "подвесим граф за вершину"

$\forall$ вершин

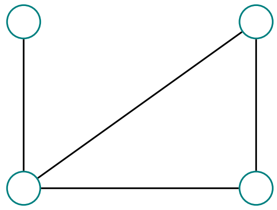
Лекция 6

Теорема Граф двудолен $\Rightarrow$ все циклы четные.

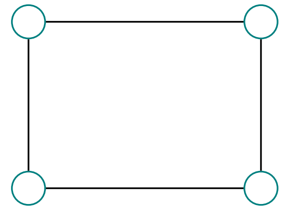
Определение G = (V,E) - граф

$\chi(g)$ - хроматическое число графа минимальное количество цветов, в которые его можно раскрасить.

Пример



$\chi = 3$



$\chi = 2$

<u>Замечание</u> Если $\leq \chi(g)$, то G можно покрасить в к цветов

Утверждение $\chi(g) \geq max\deg$ v + 1

6.1 Хроматические многочлены

Определение $\sqsupset$ $\chi(G, K)$ - это функция "сколько способов раскрасить G в K цветов"

$\chi(0 - - - 0, k) =$

K=0	0
K=1	0
K=2	2
K=3	6
K=4	12

иначе k(k-1)

$\chi(0 - - - 0, k) = k(k-1)$

$\chi(0 \qquad 0, k) = k^2$

Утверждение

1)$\chi(\phi_n, k) = k^n$ (ϕ_nграф из n вершин без ребер)

2)$\chi(K_n, k) = k(k-1)(k-2)...(k-n+1)$

3)$\chi(T_n, k = k(k-1)^n$ подвесим дерево за $\forall$ вершину k-1 цвет возможен

4)$\overline{G}$ - граф; u,v вершин с ребром (u,v)

G = G : (u,v) (без ребр)

$G^(0) = G$, где u,v станут в вершину

$\chi(G, K) = \chi(\underline{G}, K) + \chi(G^0, K) \leftarrow$ способы раскрасить G,где u,v - один цвет

$\uparrow$

способы раскрасить G,

где u и v - разный цвет

Следствие: $\chi(\underline{G}, k) = \chi(G, k) - \chi(G_0, k)$

Лекция 7

Утверждение χ (G,K) - это многочлен

1)Старший коэффициент = 1

2) Степень = n (количество вершин)

3) Знаки чередуются

4) Младший коэффициент = 0

5) Коэффициент при k^{n-1} = +-m (количество ребер)

Доказательство Индукция по количеству вершин, при равном количестве вершин: количество ребер

База Пустой граф из n вершин χ(пуст.граф,k) = k^n = переход $\overline{G}$

1) Старший коэффициент (1*k^n) - (k^{n-1})...

2) Степень = n

3) $(k^n - k^{n-1} + k^{n-2}) - (k^{n-1} - k^{n-2} + k^{n-3} + ...)$

4) Младший коэффициент = 0 - 0 = 0

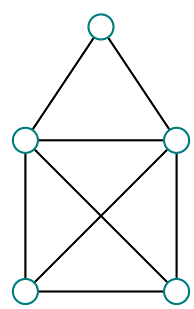
5) Ребер G*k^{n-1} - k^{n-1} = -(количество ребер G + 1)k^{n-1}

Утверждение $\chi(g)$ - хром число (мин. число цветов для раскраски)

$\chi(G,k)$ k=0,1,2.... $\chi(G) - 1$ корни многочленов $\chi(g)$ - не корень

7 Эйлеровы графы

Нарисовать данный граф, не проводя по одному ребру дважды:

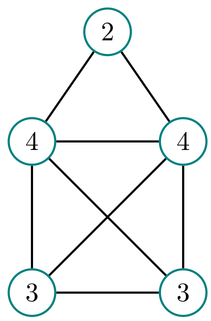


Определение Эйлеров путь - простой путь, содержащий все ребра, не проходящий дважды по одному ребру.

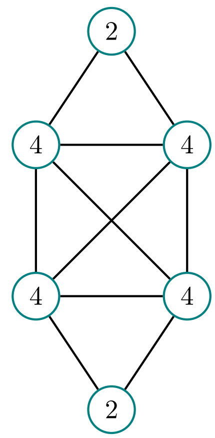
Определение Эйлеров цикл - цикл, содержащий все ребра, не проходим дважды по 1 ребру.

Утверждение Пусть G содержит эйлеров цикл, тогда G связен, и $\deg v$ — четная $\forall v \in \mathbb{V}$.

нет эйлеров циклов

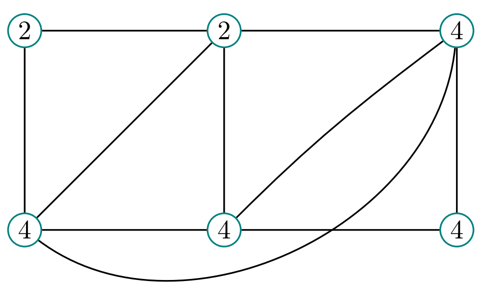


есть эйлеров цикл



Доказательство Если граф G связен, кол-во входов $=$ кол-во выходов. deg четно

Доказательство обратное Начнем строить цикл. Идем из $\forall$ вершины, выбираем ребро, которое еще не использовалось. В каждой вершине по пути использовано четное количество ребер (к входов, к выходов) $+1$ ребро, через которое вошли. Использовали нечетное количество ребер, есть еще одно, по нему можно уйти, кроме начальное из нее вышли на 1 раз больше. $\to$ мы закончили ходить в начальной вершине.

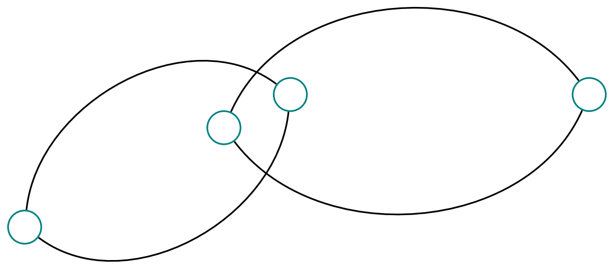


обошли не все, выкинем просмотренные ребра

Теорема Если граф связан, из начальной точки все вершины х можно попасть в $\forall$ вершину и ребро.

Повторим процесс из $\forall \in 1$ циклу, из которой ведет ребро.

Объеденим 2 цикла



Продолжать пока все ребра не объединятся в 1 цикл.

Теорема Граф содержит Эйлеров путь $\Leftrightarrow$

1) Граф связан.

2) Степени всех вершин четны, степени всех вершин кроме двух четны (в этом случае нечетные вершины - это начало и конец)

8 Гамильтонов путь/цикл

Определение Гамильтоновы пути или циклы - простые цепи/циклы по всем вершинам.