Комбинаторика и теория графов

Карпий Игорь Юрьевич студент группы 0371

Бинарные отношения

Определение:
M - множество $\neq \varnothing$
R $\subset$ M$\times$M - бинарное отношение.
Пояснение:
M$\times$M - множество пар из элементов R
Допустим M $= \{a, b, c\}$
M$\times$M $= \{(a, a)(a, b)(a, c)(b, a)(b, b)(b, c)(c, a)(c, b)(c, c)\}$
или M $= \mathbb{N}$
M$\times$M $= \mathbb{N}\times\mathbb{N} = \{(1, 1)(1, 2)(2, 1)(1, 3)(2, 2)(3, 1)(4, 4)(2, 3)...(42, 15)...\}$
отношение R - это подмножество пар
Обозначение:
вместо: (x,y)$\in$R - пара (x,y) принадлежит отношению
будем писать: xRy
вместо: (x,y)$\notin$R
будем писать: ~~xRy~~
Примеры:
1. M $= \mathbb{R}$
R $= \{(x, y) : x > y\}$
3R2 3>2
~~3R4 3>4~~
2. M $= \mathbb{R}$
отношение ($\geq$)
7$\geq$6
7$\geq$7
~~7$\geq$8~~
3. M $= \mathbb{R}$
отношение (=)
7=7
7$\neq$8
4. M $= \mathbb{R}$
отношение ($\approx$)

x≈y $\iff$ |x-y|<1
5. M = $\mathbb{R}$
отношение (#)
x#y $\iff$ x^2>y
2#2 т.к 2^2>2
7#8
~~1#2~~
~~7#100~~
6. M = $\mathbb{N}$
отношение ($\vdots$)
x $\vdots$ y $\iff$ $\exists$ k $\in$ $\mathbb{Z}$: x = ky
или
M = $\mathbb{Z}$
4 $\vdots$ 2
10 $\vdots$ 5
0 $\vdots$ 0
~~2 ⋮ 4~~
~~10 ⋮ 3~~
~~7 ⋮ 0~~
7. M = $\mathbb{Z}$
отношение ($\equiv_3$)
0 $\equiv_3$ 3
1 $\equiv_3$ 4
$\cancel{1 \equiv_3 8}$
8. M = $\mathbb{N}$
a Ц b, если в числе 'a' 'b' цифр
100 Ц 3
238 Ц 3
~~238 Ц 8~~
9. M = прямые на R^2
отношение ($\parallel$)
$l_1 \parallel l_2$ если l_1 не пересекает l_2 или l_1=l_2
10. M = прямые на R^2
отношение ($\perp$)
$l_1 \perp l_2$ - перпендикулярны
11. M = студенты ЛЭТИ
x>y средний балл за последнюю сессию 'x' больше, чем средний балл 'y'
12. M = пользователи "Одноклассники"
x $\to$ y, если 'y' в друзьях у 'x'

Иванов → Петров
~~Петров → Посов~~
Свойства бинарных отношений
Определение:
Бинарное отношение R на M называется рефлексивным, если $\forall x \in$ M xRx $((x,x) \in R)$
Замечание:
Отношение не рефлексивно $\iff$ $\exists x$ ~~xRx~~ - контрпример
Примеры:
(=) - рефлексивно ∀ x: x = x
(≥) - рефлексивно ∀ x: x ≥ x
(≈) - рефлексивно ∀ x: x ≈ x, так как |x-x|= 0 < 1
(⋮) - рефлексивно ∀ x: x ⋮ x
(>) - не рефлексивно так как ~~2 > 2~~
(Ц) - не рефлексивно так как ~~3Ц3~~
(→) ("Одноклассники") - не рефлексивно так как ~~Посов→Посов~~
Определение:
Бинарное отношение R на множестве M называется антирефлексивным, если ∀ x ~~xRx~~
Замечание:
R - не антирефлексивно $\iff$ $\exists x : xRx$ - контрпример
Примеры:
(>) - антирефлексивно так как ~~x>x~~
(⊥) - антирефлексивно так как ~~1⊥1~~
(→) - антирефлексивно так как нельзя быть у себя в друзьях
(Ц) - не антирефлексивно, контрпример 1Ц1
Замечание:
1) Ц - не рефлексивно и не антирефлексивно
2) не бывает R, которое и рефлексивно, и антирефлексивно
(рассмотрим $a \in M \rightarrow aRa$ $\implies$ - не антирефлексивно; рассмотрим $a \in M \rightarrow$ ~~aRa~~ $\implies$ - не рефлексивно)
Определение:
Бинарное отношение R на множестве M симметрично, если $\forall x, y$ xRy $\iff$ yRx
Замечание:
R - не симметрично $\iff$ $\exists x, y :$ xRy, ~~yRx~~ - контрпример
Примеры:
(=) - симметрично так как x = y $\iff$ y = x
(≈) - симметрично так как x ≈ y $\iff$ y ≈ x (|x-y|<1 и |y-x|<1)
(⋮) - не симметрично так как 4 ⋮ 2, но ~~2 ⋮ 4~~

(||) симметрично так как a||b $\iff$ b||a (c $\perp$ также)
(Ц) - не симметрично так как 100Ц3 не тоже самое, что и ~~3Ц100~~
Определение:
Бинарное отношение R на множестве M называется антисимметричным, если $\forall x \neq y$ xRy $\implies$ ~~yRx~~
Замечание:
R - не антисемметрично, если $\iff$ $\exists$ x$\neq$y xRy, yRx - контрпример
Примеры:
($>$) - антисимметрично, x$\neq$y, x$>$y $\implies$ ~~y$>$x~~
Попробуем построить контрпример:
x$\neq$y, x$>$y, y$>$x - невозможно $\implies$ нет контрпримеров $\implies$ антисимметрично
($\geq$) - антисимметрично (x$\neq$y, x$\geq$y, y$\geq$x - невозможно, нет контрпримера)
($=$) - антисимметрично (x$\neq$y, x$=$y, y$=$x - нет контрпримера)
($\equiv_3$) - не антисимметрично (1$\neq$4, 1$\equiv_3$4, 4$\equiv_3$1 - контрпример)
($\vdots$) над $\mathbb{N}$ - антисимметрично (x$\neq$y, x $\vdots$ y, y $\vdots$ x - нет для $\mathbb{N}$ чисел)
($\vdots$) над $\mathbb{Z}$ - не антисимметрично (4$\neq$-4, 4 $\vdots$ -4, -4 $\vdots$ 4) **Свойства отношений:**

1. Антисимметричность

$\vdots$ на $\mathbb{Z}$ - не антисимметрично
-2 $\vdots$ 2
2 $\vdots$ -2
2 $\pm$-2
$\vdots$ на $\mathbb{N}$ - антисимметрично
Контрпример:
x $\neq$ y, x $\vdots$ y, y $\vdots$ x
$\forall$ x, y, z x $\neq$ y x $\vdots$ y $\implies$ y $\div$ x

2. Асимметричность

Определение
R - бинарное отношение на M, если $\forall$ x, y xRy $\implies$ ~~yRx~~
Контрпример:
xRy, yRx.
Утверждение
R - асимметрично $\implies$ R - антисимметрично и антирефлексивно
Пример
$>$ - антисимметрично: $\forall$ x, y x $>$ y $\implies$ ~~y $>$ x~~
$\perp$ - асимметрично (пустое, когда R $= \varnothing$)
"выше асимметрично.

"начальник"на множестве тех, кто работает в ЛЭТИ

3. Транзитивность

R - бинарное отношение транзитивно, если $\forall$ x, y, z xRy, yRz $\implies$ xRz.

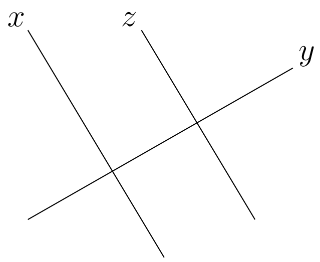
Контрпример

xRy, yRz, ~~xRz~~

Примеры

$$\text{Транзитивно} \begin{cases} >:\ x>y,\ y>z \implies x>z \\ \geqslant \\ \vdots :\ x \vdots y,\ y \vdots z \implies x \vdots z \\ \ x = ky,\ y = lz \implies x = (kl)z \implies x \vdots z \end{cases}$$

• $\perp$ - не транзитивно



x $\perp$ y

y $\perp$ z ~~y $\perp$ x~~

• Из (количество цифр) - не транзитивно

100 из 3

~~100 из 1~~

3 из 1

Определение

Отношение эквивалентности: отношение R называется отношением эквивалентности, если R - рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Замечание

~~R - эквивалентно~~

Примеры

1) = на $\mathbb{R}$ (или $\forall$ другом множестве) является отношением эквивалентности.

$\forall$x x=x - рефлексивность

$\forall$x,y x=y $\implies$ y=x - симметричность

$\forall$x,y,z x=y, y=z $\implies$ x=z - транзитивность

2) || - параллельность (одно направление)

3) $\equiv$ (mod 3) - сравнение по модулю 3 (один остаток)

(2 и 3 - эквивалентные отношения)

4) $\geqslant$ - не отношение эквивалентности, так как не симметрично:

x⩾y $\implies$ y⩾x ??
2⩾1, ~~1⩾2~~
5) $\approx$ - не отношение эквиваленстности (не транзитивно).
6) отношение $\uparrow$ на $\mathbb{N}$ x $\uparrow$ y, если у x и y поровну цифр.
2$\uparrow$5, 12 $\uparrow$ 42, ~~33 ↑ 100~~
$\uparrow$ - является отношением эквивалентности (одинаковое количество цифр)
x $\uparrow$ y $\implies$ y $\uparrow$ x - симметрично
x $\uparrow$ y, y $\uparrow$ z $\implies$ x $\uparrow$ z - транзитично

Определение

R - отношение эквивалентности на множестве M, x $\in$ M, класс элемента
x { Mx = y | xRy }

Пример

1) = : M={5}
2) $\equiv$ (mod 3): M = $\{2, 5, 8, 11, ...\}$
3) || : M = {\\\ , \\\}

Уравнение

R - отношение эквивалентности на множестве M
$\forall$x,y $\in$ M Mx=My или Mx $\bigcap$ My = $\varnothing$

Доаказательство

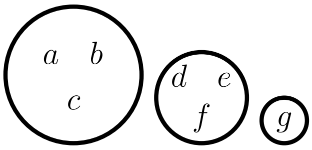
] Mx $\bigcap$ My $\neq \varnothing \implies \exists$z $\in$ Mx, z $\in$ My
$\implies$ xRz, yRz $\implies$ zRy (симметричность) $\implies$ xRy (транзитивность)
Теперь проверим, что Mx = My.
Возьмем u $\in$ Mx, проверим, что u $\in$ My.
u $\in$ Mx $\implies$ xRu, xRy $\implies$ yRx (симметричность) $\implies$ yRu (транзитивность) $\implies$ u $\in$ My. $\blacksquare$

Следствие

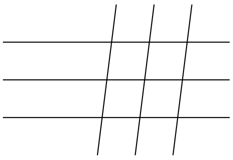
R - отношение эквивалентности на M, тогда M разбито на несколько классов жквивалентности (классы элементов).
M=M, $\cup$ ... Mn
Mi $\cap$ Mj = $\varnothing$
= на $\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$ = {1} $\cup$ {2} $\cup$ {3}...
$\equiv$ (mod 3) на $\mathbb{N}$
$\mathbb{N} = \{0, 3, 6, 9...\} \cup \{1, 4, 7, 10...\} \cup \{2, 5, 8, 11...\}$

Замечание

Если есть M = $\varnothing$, разбить на Mi = $\varnothing$
M = M, $\cup$ ... $\cup$ Mu; Mi $\cap$ Mj = $\varnothing$
Тогда можно ввести определение R. xRy если $\exists$Mi: x,y$\in$Mi.
a b c d e f g



Для || класс эквивалентности


, где M1 = { $\equiv$ } , а M2 = { /// }; Mi - направление

Отношения порядка.

(выше, лучше, сильнее бычтрее, важнее)

Определение

R - бинарное отношение.

$\rceil$ R - транзитивно, антисимметрично

1) рефлексивно - не строгий порядок

2) антирефлексивность - строгий порядок

Обозначение

$\succ$ - строгий

$\succcurlyeq$ - нестрогий

Обсуждение

a$\succ$b b$\succ$c $\implies$ a$\succ$c

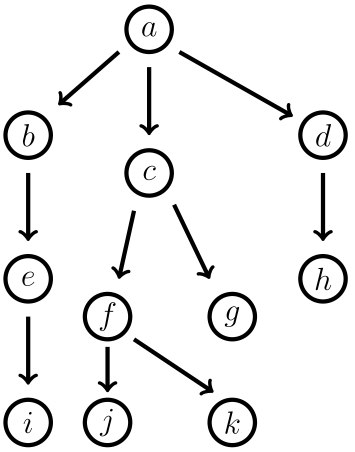
Антисимметричность: ~~a$\succ$b, b$\succ$a~~

Примеры

$>$ на $\mathbb{R}$ - строгий порядок

$\geqslant$ на $\mathbb{R}$ - не строгий порядок

$\vdots$ на $\mathbb{N}$ - не строгий порядок



$$\text{Строгий}\begin{cases}\text{a нач. b}\\ \text{a нач. c}\\ \cancel{\text{b нач. f}}\\ \text{c нач. f}\end{cases}$$

Определение

] R - строгий или не строгий порядок, R - линейный, если $\forall$x$\neq$y xRy или yRx.

R - частичный иначе ($\exists$ x$\neq$y: ~~xRy~~, ~~yRx~~)

Примеры

$>$, $\geqslant$ - линейные порядки

$\vdots$ - частичный порядок

~~2⋮3~~, ~~3⋮2~~

рас-ков - частичный

Утверждение

R - порядок (строгий или не строгий) на M - конечное множество, |M|$<\infty$, тогда $\exists$x - мин-й, то есть $\forall$y: ~~x≻y~~.