Комбинаторика и теория графов

Посов Илья Александрович

запись конспекта: Блюдин Андрей

Содержание

1 Бинарные отношения

1.1 Определение и свойства

Определение. M — непустое множество ($R \neq \varnothing$) . $R \in M \times M$ — бинарное отношение. R — подмножество $M * M$.

Пример 1. $M \times M$ — множество пар из элементов R
Допустим $M = \{a, b, c\}$
Следовательно $M \times M = \{(a, a)(a, b)(a, c)(b, a)(b, b)(b, c)(c, a)(c, b)(c, c)\}$

Пример 2. Пусть $M \times M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(1,1)(1,2)(2,1)(1,3)(3,1)...\}$. Таких пар бесконечно много.

Обозначение:
$(x, y) \in R$ — пара (x, y) является элементом подмножества.
Вместо $(x, y) \in R$ мы будем писать xRy
Вместо $(x, y) \notin R$ мы будем писать $\cancel{xRy}$

Пример 3. $M = \mathbb{R}$
Отношение больше $= > = R = \{(x, y)... : x > y\}$
$(3, 2) \in R \iff 3R2 \iff 3 > 2$
$(3, 4) \notin R \iff \cancel{3R4} \iff \cancel{3 > 4}$

Пример 4. $M = \mathbb{R}$
Отношение больше или равно $= \geq$
$7 \geq 6$ $7 \geq 7$ $\cancel{7 \geq 8}$

Пример 5. $M = \mathbb{R}$
Отношение равно $= =$
$7 = 7$; $\cancel{7 = 8}$

Пример 6. $M = \mathbb{R}$
Отношение примерно равно $= \approx$
$x \approx y \iff |x - y| < 1$
$(x, y) \in \approx$

Пример 7. $M = \mathbb{R}$
$R = \#$
$x \# y \iff x^2 \geq y$
$2 \# 2$ так как $2^2 \geq 2$
$1 \not\# 2; 7 \# 8; 7 \not\# 100$

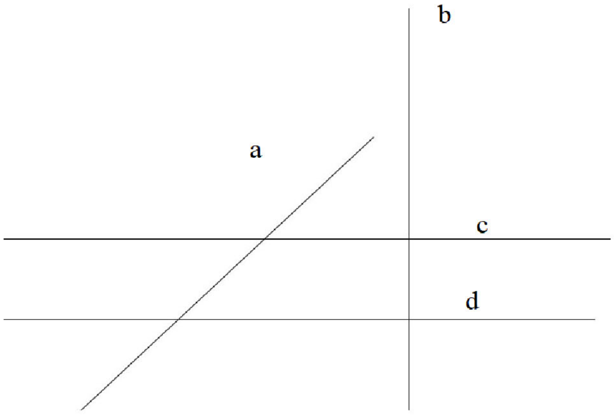
Пример 8. $M = \mathbb{N}$
Отношение делимости $= R = \vdots$
$x \vdots y \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = k * y$
$4 \vdots 2;\ 10 \vdots 5;\ 0 \vdots 0$
$\cancel{2 \vdots 4};\ \cancel{10 \vdots 3};\ \cancel{7 \vdots 0}$

Пример 9. $M = \mathbb{Z}$
Отношение сравнения по модулю $3 = R = \equiv_3$
$0 \equiv_3 3;\ 1 \equiv_3 7$
$\cancel{0 \equiv_3 2};\ \cancel{1 \equiv_3 8}$

Пример 10. $M = \mathbb{N}$
a Ц b, если в числе a "b"цифр
100 Ц 3; 238 Ц 3; ~~238 Ц 8~~

Пример 11. M = прямые на R^2 = прямые на плоскости
$R = ||$
$l_1 \mid\mid l_2$, если l_1 не пересекается с l_2 или $l_1 = l_2$

Пример 12. M = прямые на R^2 = прямые на плоскости
Перпендикулярность $= R = \perp$
$b \perp c$; $b \perp d$; $\cancel{a \perp b}$; $\cancel{a \perp c}$; $\cancel{a \perp d}$



Пример 13. M = Студент ЛЭТИ
$x \succ y$, означает что средний балл у "x"за последнюю сессию больше, чем средний балл у "y".

Пример 14. M = пользователь одноклассников
$x \to y$
Иванов $\to$ Петров

1.2 Свойства бинарных отношений

1.2.1 Рефлексивность и антирефлексивность

Определение. Бинарные отношения R на M называется рефлексимным, если $\forall\ x \in M\ : xRx \iff (x, x) \in R$

Замечание 1. Отношение не рефлексивно $\iff \exists\ x : \cancel{xRx}$

Примеры:
$=$ — рефлексивно $\forall\ x\ x = x$
$\geq$ — рефлексивно $\forall\ x\ x \geq x$
$\approx$ — рефлексивно $\forall\ x\ x \approx x$, так как $|x - x| = 0 < 1$
$\vdots$ — рефлексивно $\forall\ x\ x \vdots x$
$>$ — нерефлексивно $\cancel{x > x}$
$\perp$ — нерефлексивно $\cancel{x \perp x}$

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется антирефлексивным, если $\forall\ x\ \cancel{xRx} \iff (x, x) \notin R$

Замечание 2. R — не антирефлексивно $\iff \exists\ x : xRx$ (контрпример).

Примеры:
$>$ — антирефлексивно $\cancel{x > x}$
$<$ — антирефлексивно $\cancel{x < x}$
$\perp$ — антирефлексивно $\cancel{l \perp l}$
Ц — не антирефлексивно 1 Ц 1 — контрпример

Замечание 3. Ц — не рефлексивно и не антирефлексивно, так как не бывает R: и рефлексивное и антирефлексивное
Рассмотрим $a \in M$
$aRa \to$ не антирефлексивно
$\cancel{aRa} \to$ не рефлексивно

1.2.2 Симметричность, антисимметричность и асимметричность

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется симметричным, если $\forall\ x, y\ xRy \iff yRx$

Замечание 4. R — не симметрично $\iff \exists\ x, y\ xRy, \cancel{yRx}$ — контрпример

Примеры:
$=$ — симметрично $x = y \iff y = x$
$\approx$ — симметрично $x \approx y \iff y \approx x$, так как $|x - y| < 1 \iff |y - x| < 1$
$\vdots$ — не симметрично $4 \vdots 2, \cancel{2 \vdots 4}$ — контрпример
$||$ — симметрично $a \mid\mid b \iff b \mid\mid a$
$\perp$ — симметрично $a \perp b \iff b \perp a$
Ц — не симметрично 100 Ц 3, ~~3 Ц 100~~

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется антисимметричным, если $\forall\ x, y\ x \neq y\ xRy \Rightarrow \cancel{yRx}$

Замечание 5. R — не антисимметрично, если $\exists\ x = y\ xRy, yRx$ — контрпример

Примеры:
$>$ — антисимметрично $(x \neq y)\ x > y \Rightarrow \cancel{y > x}$, так как $x \neq y$ и $x > y\ y > x$ — невозможно $\Rightarrow$ нет контрпримера $\Rightarrow$ антисимметрично
$\geq$ — антисимметрично $(x \neq y)\ x \geq y, \cancel{y \geq x}$
$=$ — антисимметрично $(x \neq y)\ x = y, y = x$ — такое невозможно
$\equiv_3$ — симметрично $(1 \neq 4)\ 1\ \equiv_3\ 4, 4\ \equiv_3\ 1$
$\vdots$ над $\mathbb{N}$ — антисимметрично $(x \neq y)\ x \vdots y,\ y \vdots x$ — такое невозможно при $\mathbb{N}$
$\vdots$ над $\mathbb{Z}$ — не антисимметрично $(4 \neq -4)\ 4 \vdots -4,\ -4 \vdots 4$

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется асимметричным, если $\forall\ x, y\ xRy \Rightarrow \cancel{yRx}$

Замечание 6. Если при антисимметричности обязательно условие $x \neq y$, то при асимметричности это условие не обязательно. Также, если какой-то элемент находится в отношении с самим собой, то не наоборот
$(x = y\ xRy \Rightarrow \cancel{yRx})$.
Контрпример: $xRy,\ yRx$

Утверждение 1. *R — асимметрично* $\iff$ *R — антисимметрично и антирефлексивно*

Пример 15. $>$ — отношение больше — асимметрично, так как $\forall\ x, y \Rightarrow \cancel{y > x}$

Пример 16. $\square$ — пустое отношение (когда никто ни с кем не находится в отношении $R = \varnothing$) — асимметрично

Пример 17. Отношение "выше"на множестве студентов тоже является асимметричным

Пример 18. R — "начальник"на множестве тех, кто работает в университете тоже является асимметричным, так как, если x начальник y $\Rightarrow$ ~~y начальник x~~

1.2.3 Транзитивность

Определение. Бинарное отношение R на множестве M называется транзитивным, если $\forall\ x, y, z:\quad xRy, yRz \Rightarrow \cancel{xRz}$

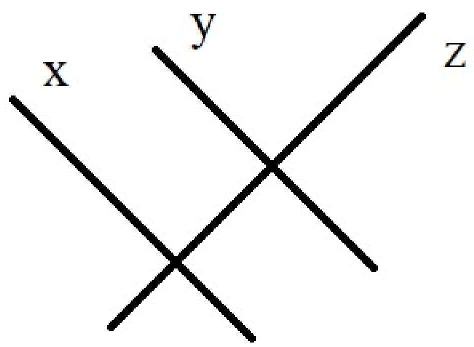
Контрпример: $xRy, yRz, \cancel{xRz}$

Пример 19. $>$ — транзитивно, так как $x > y, y > z \Rightarrow x > z$

Пример 20. $\geq$ — транзитивно, так как $x \geq y, y \geq z \Rightarrow x \geq z$

Пример 21. $\vdots$ — транзитивно, так как $x \vdots y, y \vdots z \Rightarrow x \vdots z$
Пусть $x = k * y,\ y = l * z \Rightarrow x = (k * l) * z \Rightarrow x \vdots z$

Пример 22. $\perp$ — не транзитивно, так как $x \perp z, y \perp z, \cancel{x \perp y}$



Пример 23. Отношение "Ц"(количество цифр) — не транзитивно, так как 100 Ц 3, 3 Ц 1, но ~~100 Ц 1~~

1.3 Отношение эквивалентности

Определение. Отношение R называется (является) *отношением эквивалентности*, если R - рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Утверждение 2. *Нельзя говорить ~~R — эквивалентно~~. Верно — R является отношением эквивалентности*

Пример 24. Отношение "="на множестве $\mathbb{R}$ (или на любом другом множестве)
$\forall\, x \quad x = x$ — рефлексивность
$\forall\, x, y \quad x = y,\ y = x$ — симметричность
$\forall\, x, y, z \quad x = y,\ y = z \Rightarrow x = z$ — транзитивность
Отношение "="является отношением эквивалентности

Пример 25. Отношение "||"параллельности является отношением эквивалентности
$\forall\, a \quad a||a$ — рефлексивности
$\forall\, a, b \quad a||b,\ b||a$ — симметричность
$\forall\, a, b, c \quad a||b,\ b||c \Rightarrow a||c$ — транзитивность

Пример 26. Отношение "$\equiv_3$"сравнения по модулю 3 является отношением эквивалентности
$\forall\, x \quad x \equiv_3 x$ — рефлексивность
$\forall\, x, y \quad x \equiv_3 y,\ y \equiv_3 x$ — симметричность
$\forall\, x, y, z \quad x \equiv_3 y,\ y \equiv_3 z \Rightarrow x \equiv_3 z$ — транзитивность

Пример 27. Отношение "$\geq$"не является отношением эквивалентности так как $\forall\, x, y \quad x \geq y, \cancel{y \geq x}, \quad 2 \geq 1, \cancel{1 \geq 2}$

Пример 28. Отношение "$\approx$"не является отношением эквивалентности так как $\forall\, x, y, z \quad x \approx y, y \approx z \Rightarrow \cancel{x \approx z}, \quad 1 \approx 2, 2 \approx 3, \cancel{1 \approx 3}$

Пример 29. Отношение "$\uparrow$"на $\mathbb{N}$, такое что $x \uparrow y$, если у "x"и "y"одинаковое количество цифр ($2 \uparrow 5,\ 12 \uparrow 42$)
Отношение $\uparrow$ является отношением эквивалентности, так как
$\forall\, x \quad x \uparrow x$ — рефлексивность
$\forall\, x, y \quad x \uparrow y,\ y \uparrow x$ — симметричность
$\forall\, x, y, z \quad x \uparrow y,\ y \uparrow z \Rightarrow x \uparrow z$ — транзитивность

Определение. R — отношение эквивалентности на множестве M, $x \in M$, класс элемента x обозначается Mx. $Mx = \{y\ : xRy\}$

Пример 30. Отношение "=" $\quad M_5 = \{5\}$, так как 5 равняется только 5

Пример 31. Отношение "$\equiv_3$" $\quad M_2 = \{2, 5, 8, 11 \ldots\}$

Пример 32. Отношение "||" $\quad M_l = \{$ все прямые паралелльные $l\}$

Утверждение 3. *R — отношение эквивалентности на множестве M*
$\forall\, x, y \in M \quad M_x = M_y$ *или* $M_x \cap M_y = \varnothing$

Пример Отношение "$\equiv_3$" $\quad M_2 = \{2, 5, 8, 11 \ldots\} = M_5 = M_8$, то есть классы M_2, M_5, M_8 совпали

Доказательство Пусть $\exists\ M_x \cap M_y \neq \varnothing$
$\Rightarrow \exists\ z:\ z \in M_x,\ z \in M_y$
$\Rightarrow xRz,\ yRz$
$yRz \Rightarrow zRy$ (по симметричности); $xRz,\ zRy \Rightarrow xRy$ (по транзитивности)
Теперь проверим, что класс $M_x = M_y$
Возьмем $U \in M_x$, проверим, что $U \in M_y$
$U \in M_x \Rightarrow xRu$
$xRy \Rightarrow yRx$ (по симметричности)
$yRx, xRu \Rightarrow yRu \Rightarrow U \in M_y$

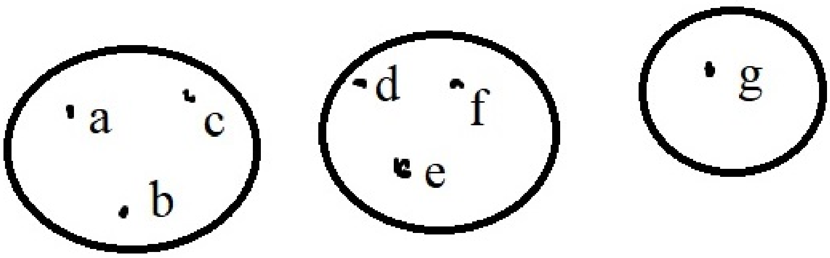
$\Rightarrow M_x = M_y$

Следствие 1. *R — отношение эквивалентности на мнжестве M, тогда M разбито на несколько классов эквивалентности (классов элементнов): $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots M_n, \quad M_i \cap M_j = \varnothing$*

Пример 33. Бинарное отношение "="на множестве $\mathbb{N}$ является отношением эквивалентности и также делит мнжество $\mathbb{N}$ на классы:
$N = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \dots$

Пример 34. Бинарное отношение "$\equiv_3$"на множестве $\mathbb{N}$ является отношением эквивалентности и также делит мнжество $\mathbb{N}$ на классы:
$N = \{0, 3, 6, 9, \dots\} \cup \{1, 4, 7, 10, \dots\} \cup \{2, 5, 8, 11, \dots\}$

Замечание 7. Если есть $M \neq \varnothing$ разбитое на $M_i \neq \varnothing$
$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \cup \dots \qquad M_i \cap M_j = \varnothing$
Тогда можно ввести отношение эквивалентности R: xRy,
если $\exists M_i : \quad x, y \in M_i$
Пусть есть элементы множества a,b,c,d,e,f,g: $\Rightarrow aRb, bRc, gRg, \cancel{gRa}, \cancel{aRd}$



Утверждение 4. *То есть отношение экваваленатности — это просто разбиение множества на классы*

Пример 35. Для бинарного отношения $||$, параллельности прямых, которое является отношением эквивалентности, классы эквивалентности: Возьмем одну прямую $\Rightarrow$ все прямые параллельные данной прямой —

это и будет классом эквивалентности M_1. Возьмем другую прямую $\Rightarrow$ все прямые параллельные данной прямой будут уже другим классом эквивалентности M_2
$\Rightarrow$ Направление на плоскости (все прямые направленные в одну сторону) — это класс эквивалентности паралелльных прямых

1.4 Отношения порядка

(выше, лучше, сильнее, быстрее, важнее ...)

Определение. Бинарное отношение R является предпорядком, если R транзитивно и рефлексивно

1.4.1 Строгий и нестрогий порядок

Определение. Бинарное отношение R, если R — транзитивно, антисимметрично, а также

1. рефлексивно — тогда R нестрогий порядок, обычно обозначается $\succeq$
2. антирефлексивно — тогда R строгий порядок, обычно обозначается $\succ$

Пример 36. $a \succ b, b \succ c \Rightarrow a \succ c$ (a лучше c) — транзитивность

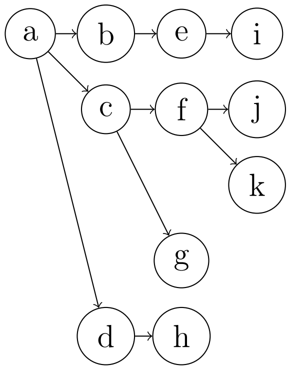
Пример 37. $a \succ b, \cancel{b \succ a}$ — антисисмметричность

Пример 38. Бинарное отношение ">"на множестве $\mathbb{R}$ — строгий порядок

Пример 39. Бинарное отношение "$\geq$"на множестве $\mathbb{R}$ — нестрогий порядок

Пример 40. Бинарное отношение "$\vdots$"на множестве $\mathbb{N}$ — нестрогий порядок

Пример 41. Бинарное отношение "начальник"на множестве $\mathbb{R}$ — строгий порядок



Получается: a начальник b, a начальник c, ~~b начальник f~~, c начальник f. Получается данное бинарное отношение может быть и строгим и нестрогим порядком, все зависит от того, как его определить (может ли человек быть сам у себя начальником).

1.4.2 Линейный и частичный порядок

Определение. Пусть R — строгий или нестрогий порядок.

- R — линейный, если $\forall\ x \neq y \Rightarrow xRy$ или yRx. В предыдущем примере это элементы: aRb, bRc, aRd
- R — частичный, иначе говоря $\exists\ x \neq y$: $\cancel{xRy}$, $\cancel{yRx}$, непонятны взаимоотношение между элементами. В предыдущем примере это элементы: b и c, e и f, g и h

Пример 42. Бинарные отношения $>$ и $\geq$ — линейный порядок

Пример 43. Бинарные отношения $\vdots$ — частичный порядок, так как контрпример — $\cancel{2 \vdots} 3$, $\cancel{3 \vdots} 2$

1.4.3 Минимальный элемент порядка

Утверждение 5. *Бинарное отношение R - строгий или нестрогий порядок, на множестве M — конечном ($|M| < \infty$). Тогда $\exists\, x$ — минимальный, то есть $\forall y \neq x$: $\cancel{xRy}$ (x не может быть в отношении с y)*

Пример 44. Бинарные отношения $\geq$ на множестве $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
1 — min, так как $\forall\, y \neq 1 \quad \cancel{1 \geq y}$

Пример 45. Бинарные отношения $\vdots$ на множестве $M = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
2 — min, так как $\forall\, y \neq 2 \quad \cancel{2 \vdots y}$
3 — min, так как $\forall\, y \neq 3 \quad \cancel{3 \vdots y}$
5 — min, так как $\forall\, y \neq 5 \quad \cancel{5 \vdots y}$
4 и 6 — не минимальные, так как $4 \vdots 2,\ 6 \vdots 2$

Доказательство: Докажем, что есть минимальный элемент. Возьмем любой элемент из нашего конечного множества М. Берем x_1 — любой элемент множества.
Если x_1 не минимальный $\Rightarrow \exists\, x_2 \neq x_1 : \quad x_1 \succ x_2$
Если x_2 не минимальный $\Rightarrow \exists\, x_3 \neq x_2 : \quad x_2 \succ x_3$
...
...
Если не можем найти минимальный элемент $\Rightarrow$ так как множество М конечно, то наши x_n повторяться $\Rightarrow$ в какой-то момент:
$x_i \succ x_{i+1} \succ x_{i+2} \succ \ldots \succ x_{j-1} \succ x_j = x_i$
Теперь вспомним свойства нашего отношения, так как $\succ$ отношения порядка $\Rightarrow$ оно транзитивно $\Rightarrow x_i \succ x_{j-1},\ x_{j-1} \succ x_i$ и $x_{j-1} \neq x_i$
Таким образом мы нашли первый повтор, когда
$x_i \succ x_{j-1},\ x_{j-1} \succ x_i$ и $x_{j-1} \neq x_i$, но такое не возможно по антисимметричности.
Антисимметричность говорит, что не может 1 элемент быть лучше 2 и одновременно 2 элемент лучше 1, у нас же отнешение порядка.
Поэтому всегда существует минимальный элемент

1.4.4 Топологическая сортировка

Определение. Отношение R_1 на множестве M расширяет R_2 на M, если $R_2 \subset R_1$, (R_2 содержится в R_1).

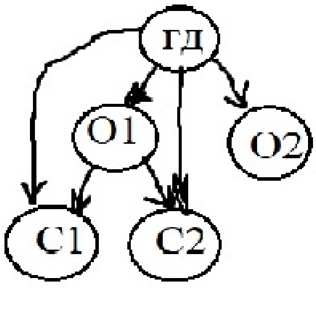
Замечание 8. Отношение — это множество пар, отношение перечисляет какие элементы находятся в отношении друг с другом. То есть, если добавить несколько пар, утверждая, что теперь больше элементов находится в отношении, то значит мы расширяем отношение.
R_1 "добавляет"пары, где xRy

Замечание 9. Если во втором отношении (R_2) xR_2y, значит в расширенном отношении (R_1) xR_1y

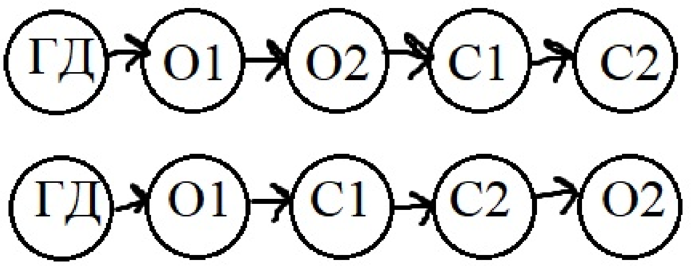
Теорема 1. *О топологической сортировке (о том, что частичный порядок можно отсортировать в линейный)*
Если $\succ$ — отношение порядка (строгого или нестрогого) на конечном

множестве M, то $\exists \gg$ *— отношение линейного порядка на множестве M, такое что* $\gg$ *расширяет* $\succ$

Пример 46. Бинарное отношение — "подчиненный"



Это не линейный порядок, потому что в линейном порядке любые два элемента сравнимы, а здесь не все сравнимы (Сотрудник1 и Сотрудник2, Отдел1 и Отдел2). Поэтому этот порядок частичный, что-то упорядочено, что-то нет.
Но теперь его можно сделать линейным порядком



Это уже два различных согласованных линейных порядка. Таких вариантов топологической сортировки много.

Доказательство:
Докажем, что топологическая сортировка существует
Это доказательство является алгоритмом, то есть мы конструктивно покажем как делать топологическую сортировку.
На нашем конечном множестве M (если множество бесконечно, то такая сортировка не всегда существует) находим минимальный элемент отношения $\succ$ (исходного). Пусть это будет элемент $x_1 \in M$.
Удаляем данный элемент x_1 из множества M.
Теперь у нас новое отношение $\succ$ на ограниченном множестве $M - \{x_1\}$.
Очевидно, что новое отношение тоже имеет свойства: рефлексивность

или антирефлексивность (строгий или нестрогий порядок), антисимметричность, транзитивность
$\Rightarrow$ данное отношение осталось отношением порядка
$\Rightarrow$ в нем есть минимальный элемент, пусть это будет x_2
удаляем x_2 из M и продолжаем так ...
В какой-то момент множество M станет пустым
$\Rightarrow$ мы получили последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (n = размеру множества M), которая и будет являться линейным порядком.
Вводим новый порядок $x_i \ll x_j$, для $i < j$
$x_1 \ll x_2 \ll \ldots \ll x_n$
почему $\ll$ расширяет $\prec$
Если $x \prec y \Rightarrow x$ был удален раньше y
$\Rightarrow x \ll y$

Замечание 10. Этот алгоритм (поиска минимума и удаления) не самый эффективный. Лучше — сделать поиск в глубину и построить обратную нумерацию.

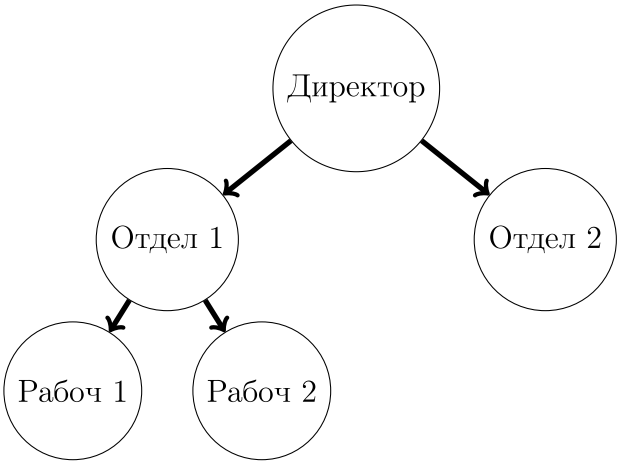
Замечание 11. Топологическая сортировка — это практически важная задача.

Пример 47. Есть список работ, которые зависят друг от друга. Например, нужно купить бумагу для распечатки, потом распечатать доклад и рекламу, а потом сделать по этому отчет. Покупать бумагу явно нужно первым действием, так как от нее зависят дальнейшие действия. Затем, необходимо сделать либо распечатку доклада, а потом рекламы, либо распечатку рекламы, а потом доклада. Порядок выполнения данных действий не важен, так как они не зависят друг от друга. В конце самом нужно сделать отчет. Это один из примеров топологической сортировки.

1.5 Транзитивное замыкание

Определение. У нас был какой-то порядок и мы его расширяли до линейного порядка (задача о топологической сортировке). А теперь было какое-то отношение (порядок оно или не порядок — неважно) и мы хотим расширить его до транзитивного минимальным способом (добавив минимальное количество рёбер) — это называется транзитивное замыкание

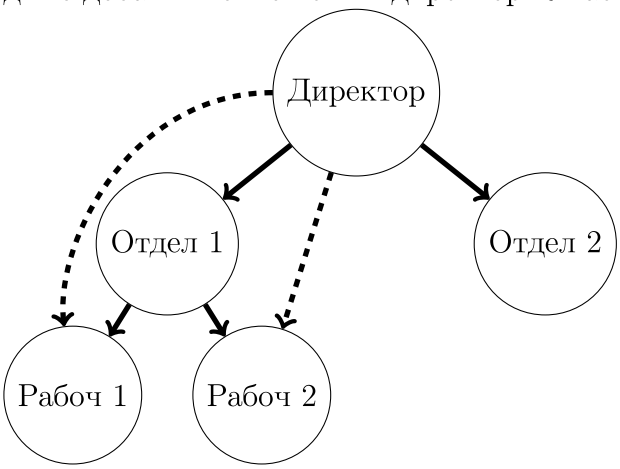
Пример 48. Пусть есть отношение "подчиненный"



В таком виде данное отношение не транзитивно.
директор R Отдел1, Отдел1 R Рабочий1

В транзитинвом отношении следует, что директор R Рабочий1, но в данном примере оно не так.

Следовательно для расширения отношения до транзитивного необходимо добавить отношения: директор R Рабочий1 и директор R Рабочий2



Теперь данное отношение транзитивно

Теорема 2. *Пусть R — бинарное отношение на множестве M.*
Тогда $\exists\, \overline{R}$ на множестве M.
Такое что:

1. *$\overline{R}$ расширяет R ($R \subset \overline{R}$)*

2. *$\overline{R}$ транзитивно*

3. *$\overline{R}$ минимальное транзитивное расширение, то есть если $\tilde{R}$ транзитивно расширяет R, то $\tilde{R} \supset \overline{R}$ (то есть существует возмож-*

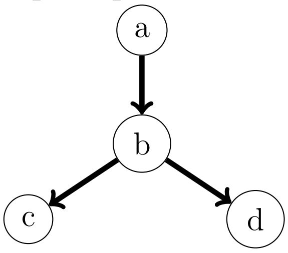
ность добавить минимальное количество ребер, добавить минимальное количество пар в наше отношение, чтобы отнношение стало транзитивным, причем любое другое транзитивное расширение означает, что надо еще добавлять ребра)

Доказательство: (в данном случае оно не конструктивно, то есть не получится его запрогроммировать, но математически оно конструктивно)

Рассмотрим вообще все транзитивные расширения. Пусть это будет какое-то семейство $\{\overline{R_i}\}$ (семейство, так как их нельзя упорядочить и их возможно бесконечно большое количество)

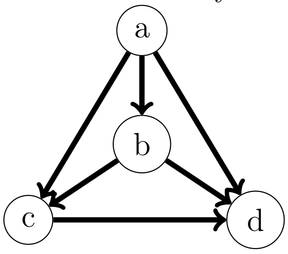
Возьмем R как пересечение всех этих $\overline{R_i}$ $\quad(\overline{R} = \cap\overline{R_i})$, то есть мы берем только те пары, которые есть во всех транзитивных расширениях

Пример 49. Множество М $= \{a, b, c, d\} \quad aRb, bRc, bRd$



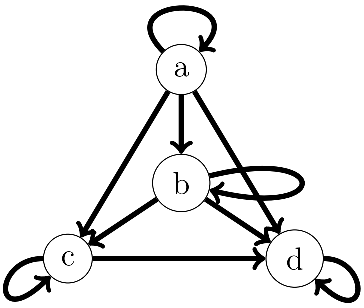
Достроить это отношение до транзитивного можно разными способами

Возьмем случай с транзитивным расширением $\overline{R_1}$



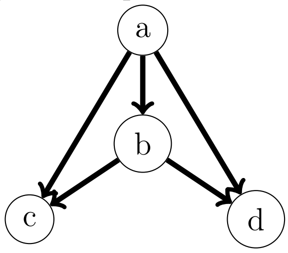
Данное бинарное отношение уже транзитивное

Возьмем другой случай с транзитивным расширением $\overline{R_2}$



Данное бинарное отношение тоже транзитивное, в него добавлены отношения $aRa, bRb, cRc, dRd, aRc, aRd$

Для того, чтобы сделать минимальное транзитивное расширение мы должны взять ребра находящиеся во всех расширениях (в данном примере это пары aRc и aRd)



Следовательно этот пример ($\overline{R}$) и будет минимальным транзитивным расширением

Проверим, что $\overline{R}$ подходит под все условия и действительно является минимальным транзитивным расширением.

1. $\overline{R}$ — расширяет R, так как

   Пусть какой-то x находится в отношении с y (xRy) $\Rightarrow \forall\, \overline{R_i} \quad x\overline{R_i}y$ (для любого расширения x будет в отношении с y) $\Rightarrow$ в пересечении всех расширений x будет в отношении с y ($x\overline{R}y$)

2. $\overline{R}$ — транзитивен, так как

   Мы пересекли все транзитивные расширения, следовательно почему мы получили транзитивное расширение тоже.

   Пусть $x\overline{R}y$ и $y\overline{R}z$ (Теперь нужно понять почему $x\overline{R}z$) $\Rightarrow$ $\forall\, \overline{R_i} \quad x\overline{R_i}y, y\overline{R_i}z$ ($x\overline{R_i}y$ — транзитивно) $\Rightarrow \forall\, \overline{R_i} \quad x\overline{R_i}y \Rightarrow x\overline{R}z$ — транзитивно

3. $\tilde{R} = \overline{R_i} \supset R$, так как R — это $\overline{R_i} \cap \ldots$

4. почему вообще такие $\overline{R_i}$ вообще существуют.

   На самом деле существует, надо просто дополнить до полного отношения, то есть добавить прям вообще все (все пары в отношении). $\overline{R_1}$ = полное отношение = $M \times M$ (все пары находятся в отношении) $\Rightarrow$ данное отношение транзитивно (так как все стрелочки проведены между элементами)

Основаная мысль теоремы:

Если есть отношение, то его всегда можно расширить до транзитивного просто добавив несколько пар. И такое отношение можно получить минимальным способом.

2 Графы

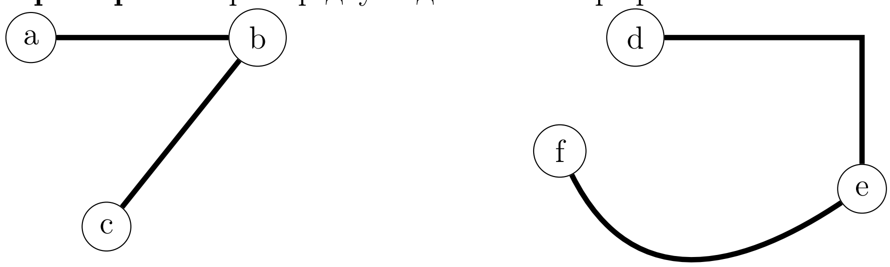
Определение. Неориентированный граф — $G = (V, E)$, где V (vertex) — производное множество, элементы которого называются вершинами, а E (edge) — это неупорядоченные пары из двух вершин ($E = \{(u, v), u, v \exists V\}$). В неориентированном графе нам важно кто с кем соединен, но нам не важно есть ли какое-то направление, кто первый, а кто второй? То есть пара $(u, v) = (v, u)$

Замечание 12. Как рисовать:

Вершины — это всякие точки или кружочки

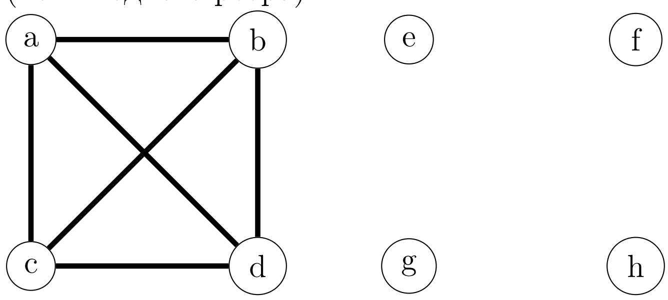
Ребра — линии соединяющие точки или кружочки, причем не важно какой формы линяя, главное что она соединяет

Пример 50. Пример двух одинаковых графов:



То есть не важно как соединено, важно что соединено

Пример 51. Пример полного графа (все ребра есть) и пустого графа (нет ниодного ребра)



Определение. Полный граф — G — полный, если $\forall\, u, v \in V$ ребро $(u, v) \in E$ (любые две пары вершин соединены)

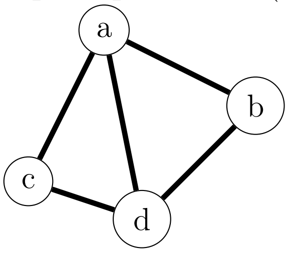
Определение. $|G|$ — размер или порядок графа = $|V|$ — количеству вершин

Обычно $|V| = n$ — количество вершин

Обычно $|E| = m$ — количество ребер

Иногда говорят, что G — это (n, m) граф

Пример 52. Это (4,5) граф:



Вершина a в данном примере имеет степень 3, а вершина b степень 2

Определение. Степень вершины графа — это количество ребер, которым принадлежит данная вершина ($|\{(v,u)\}|(v,u) \in E|$).

Обозначение: $deg(v) = \dots$

Определение. K-регулярный граф — это граф, степени вершин которого равны k ($\forall\, v \in V \quad deg(v) = k$)

Пример 53. Слева изображен 2-регулярный граф, а справа 3-регулярный граф